

ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE
BAND 74 HEFT 7
DER GANZEN REIHE 379. BANDES 7. HEFT

KURATORIUM:
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT ZWEI TAFELN



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1924 erscheinen Bd. 73, 74 u. 75 à 8 Hefte.

Preis von Band 74 für Deutschland Goldmark 20.—; England £ 1—;

Holland fl. 11.50; Schweiz Fr. 25.—, U.S.A. \$ 4.50.

Ausgegeben im Juli 1924.

Inhalt.

	Seite
1. Werner Heisenberg. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen	577
2. George Jaffé. Über die Ungültigkeit des Gleichverteilungssatzes bei Oszillatoren und Rotatoren	628
3. B. Walter. Beugungsfransen an Spaltaufnahmen mit Röntgenstrahlen. Dem Andenken C. H. Winds gewidmet. (Hierzu Tafel I u. II.)	661

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 91.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

alte

77

28

61

en

en

se

in

zu

n,

bit

es

en

n-

d-

st

et.

en

u-

en

u

es

en

s,

d
Z
m
m
U
A
p
ti

d
d
ei
in
le

al
u
te
sp
g
P
ce

ac

16

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 74.

1. *Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen; von Werner Heisenberg.*

Einleitung.

Das Turbulenzproblem, das ganz allgemein den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden soll, ist im Laufe der Zeit in so vielen Arbeiten von so vielen verschiedenen Gesichtspunkten aus behandelt worden, daß es nicht unsere Absicht sein kann, einleitend über die bisherigen Resultate eine Übersicht zu geben. Wir verweisen zu diesem Zweck auf eine Arbeit von Noether¹⁾ über den heutigen Stand des Turbulenzproblems, in welcher auch die meisten Literaturangaben zu finden sind.

Für unseren Zweck genügt es, den gegenwärtigen Stand des Turbulenzproblems in ganz groben Umrissen zu skizzieren: die bisherigen Untersuchungen zerfallen in zwei Teile: die einen von ihnen befassen sich mit der Stabilitätsuntersuchung irgendwelcher laminaren Bewegung, die anderen mit der turbulenten Bewegung selbst.

Die ersteren führten anfangs zu dem negativen Resultat, daß alle untersuchten Laminarbewegungen stabil seien. v. Mises²⁾ und Hopf³⁾ bewiesen auf Grund eines Ansatzes von Sommerfeld⁴⁾ die Stabilität des der Couetteschen Anordnung entsprechenden linearen Geschwindigkeitsprofils, Blumenthal⁵⁾ gelangte bei einem von Noether zur Diskussion gestellten Profile 3. Grades zu demselben Ergebnis. Dagegen gelang es später Noether⁶⁾, ein labiles Profil anzugeben — allerdings

1) F. Noether, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1. S. 125, 1921.

2) R. v. Mises, Beitrag z. Oszillationsprobl.: Heinr. Weber-Festschrift. 1912. S. 252.

3) L. Hopf, Ann. d. Phys. 44. S. 1. 1914.

4) A. Sommerfeld, Atti d. IV. congr. int. dei Mathem. Rom 1909.

5) O. Blumenthal, Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. S. 563. 1913.

6) F. Noether, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1917.

ein Profil, das schon im Falle der reibungslosen Flüssigkeit labil ist und auch in Wirklichkeit nie als stationärer Bewegungszustand realisierbar ist. In neuerer Zeit aber hat Prandtl¹⁾ gezeigt, daß es in der Tat Profile gibt, die erst bei Berücksichtigung der Reibung labilen Charakter besitzen.

Die andere Gruppe von Arbeiten, die in jüngster Zeit durch die Rechnungen²⁾ von v. Karman, Latzko u. a. große Erfolge erzielt hat, untersucht die turbulente Bewegung selbst und geht dabei auf halbempirischem Wege mit Benutzung der Ähnlichkeitsgesetze vor. Theoretisch fußt sie fast durchweg auf dem Boden der Prandtl'schen Grenzschichttheorie. Das für uns wichtigste Resultat dieser Arbeiten ist das aus dem empirischen Blasius'schen Widerstandsgesetz (die Zitate bei Schiller⁵⁾) folgende sogenannte $y^{1/2}$ -Gesetz der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung.

Ein Hauptziel der erstgenannten Arbeiten, der Stabilitätsuntersuchungen, bildete stets die Ermittlung der kritischen Reynoldsschen Zahl. Eine befriedigende Berechnung dieser Zahl ist bisher nicht gelungen und es muß auch als fraglich betrachtet werden, ob eine solche durch Stabilitätsuntersuchungen geleistet werden kann. Die Versuche von Ekman³⁾, Ruckes⁴⁾ und Schiller⁵⁾ zusammen mit dem negativen Ergebnis Hopfs beim linearen Geschwindigkeitsprofil legen vielmehr den Gedanken nahe, daß die kritische Reynoldssche Zahl nicht den Punkt angibt, an dem die Laminarbewegung anfängt labil zu werden, sondern den, an dem zum erstenmal die turbulente Bewegung als stationärer Zustand möglich ist. Vom Standpunkt der Theorie aus müssen wir also darauf gefaßt sein, unter Umständen zwei kritische Reynoldssche Zahlen zu finden, die eine entsprechend

1) L. Prandtl, *Physik. Zeitschr.* **23**. S. 19. 1922 und O. Tietjens, *Dissert.* Göttingen 1922.

2) Vgl. bes. *Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.* **1**. S. 233f. 1921.

3) V. Ekman, *Turbulent motions of Liquids*. *Arch. f. Mat. och fysik* **6**. S. 12. 1919.

4) W. Ruckes, *Dissert.* Würzburg 1907. Vgl. auch den Vortrag von W. Wien, *Über turbul. Bewegungen*. *Phys. Zeitschr.* **8**. 1904 und *Verh. d. deutsch. phys. Gesellsch.* **9**. 1907.

5) L. Schiller, *Rauhigkeit und kritische Zahl*. *Physik. Zeitschr.* **3**. S. 412. 1920.

dem Beginn der Turbulenz, die andere entsprechend dem Niederbrechen der Laminarbewegung.

Auch die vorliegende Untersuchung soll in die zwei verschiedenen Teile, die Behandlung des Stabilitätsproblems einerseits, die der turbulenten Bewegung andererseits zerfallen.

Das Ziel des ersten Teiles soll sein, alle bisherigen Untersuchungen unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammenzufassen, d. h. möglichst allgemein die Bedingungen dafür aufzustellen, wann ein Profil labilen oder stabilen Charakter trägt und die Methoden anzugeben zur Lösung der Stabilitätsgleichung für jedes beliebige Geschwindigkeitsprofil und zur Berechnung der für labile Profile sich ergebenden kritischen Reynoldsschen Zahl. Dieses Ziel kann natürlich nur durch Anwendung von Näherungsverfahren unvollkommen erreicht werden. Dennoch hoffen wir, die qualitativ wesentlichen Gesichtspunkte durch solche Rechnungen klarstellen zu können. Die Untersuchung irgend eines beliebigen Profils scheint zwar zunächst physikalisch sinnlos zu sein, da nur bestimmte Profile in Wirklichkeit vorkommen. Indem wir aber irgendein Profil als endliche Störung eines anderen auffassen können, wie dies z. B. Noether a. a. O. getan hat, wir andererseits später die Untersuchungen auf das zunächst unbekannte Grundprofil der turbulenten Bewegung ausdehnen müssen, so scheint die Untersuchung eines beliebigen Profils doch von großer Wichtigkeit.

Als Anwendung der Methoden soll das Parabelprofil durchgerechnet werden.

Im zweiten Teile wollen wir versuchen, unter gewissen stark idealisierenden Voraussetzungen Differentialgleichungen für die turbulenten Bewegungen abzuleiten und aus diesen qualitative Aufschlüsse zu erhalten über einige Eigenschaften der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung.

I. Teil: Die Stabilitätsgleichung.

§ 1. Festlegung des mathematischen Problems.

Die wesentlichste Beschränkung, die wir unseren Rechnungen auferlegen, besteht in der ausschließlichen Betrachtung von ebenen Laminarbewegungen und nur ebenen Störungen derselben. Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems X, Y, Z nehmen wir also an, daß die Ge-

schwindigkeit in der Z -Richtung Null und alle übrigen Größen von z unabhängig seien. Weiter aber werden wir auch nur die Stabilität solcher Laminarbewegungen prüfen, die zwischen zwei geraden, parallelen Wänden verlaufen. Dabei nehmen wir an, daß die Wände der X -Achse parallel laufen, daß also auch die zu untersuchende Laminarbewegung eine Geschwindigkeitskomponente nur in der X -Richtung besitzt. Diese Geschwindigkeit w in der X -Richtung wird in irgendeiner Weise von y abhängen; über die Funktion $w = w(y)$ behalten wir uns vor, später einige Annahmen über Stetigkeit, Symmetrie usw. zu machen; sonst soll diese Funktion jedoch zunächst ganz willkürlich sein.

Würden wir $w = ay$ setzen, so würden unsere Ansätze gerade mit den von Hopf beim Couetteschen Fall untersuchten identisch. Auf die Frage, ob sich die untersuchten Profile $w = w(y)$ als stationäre Bewegungen realisieren lassen, gehen wir zunächst nicht ein (vgl. u. S. 581).

Bevor wir die (bereits von Sommerfeld a. a. O. aufgestellte) Stabilitätsgleichung noch einmal in Kürze aus den Stokesschen Differentialgleichungen herleiten, führen wir in bekannter Weise dimensionslose Variable ein. Sei h eine charakteristische Länge (etwa der Abstand beider Wände), U eine charakteristische Geschwindigkeit des Profils, μ die Zähigkeit, ρ die Dichte, $\frac{U \cdot h \cdot \rho}{\mu} = R$ die Reynoldssche Zahl, so führen wir statt x, y, u, v, t, p (unter u, v werde die Geschwindigkeit in der x - bzw. y -Richtung verstanden, t sei die Zeit, p der Druck) neue Variablen $x_0, y_0, u_0, v_0, t_0, p_0$ ein vermöge der Relationen

$$(1) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{x}{h}; & y_0 = \frac{y}{h}; & u_0 = \frac{u}{U}; & v_0 = \frac{v}{U}; & t_0 = t \cdot \frac{U}{h}; \\ & & & & p_0 = p \cdot \frac{h}{\mu U}. \end{cases}$$

Lassen wir nachträglich den Index 0 weg, so lauten die Stokesschen Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{cases}$$

Weil wir Inkompressibilität voraussetzen, schreiben wir

$$(3) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Durch Elimination von p erhalten wir bekanntlich:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi = \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi.$$

Unter Δ ist hier das Differentiationssymbol

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

verstanden.

In Gleichung (4) ist noch nichts über unser spezielles Problem, die Stabilitätsuntersuchung einer gewissen Laminarströmung, enthalten. Dementsprechend wird Gleichung (4) auch die Grundlage für die Rechnungen des Teils II bilden. Um speziell zur Stabilitätsuntersuchung überzugehen, teilen wir die Bewegung und damit auch das Vektorpotential ψ in eine Grundströmung und darüber überlagerte kleine Schwingungen. Wir machen also den Ansatz:

$$(5) \quad \psi = \Phi(y) + \varphi(y) e^{i(\beta t - \alpha x)},$$

$$(6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = w(y) = w.$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in (4) ein, lassen dabei alle Glieder weg, die φ nicht enthalten (da wir die Gleichung (4) für $\varphi = 0$ als erfüllt ansehen), lassen ferner alle in φ quadratischen Glieder weg (da wir φ als klein voraussetzen), so lautet die entsprechende Differentialgleichung für φ :

$$(7) \quad (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - \varphi w'' = \frac{i}{\alpha R} (\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi).$$

Daß wir Gleichung (4) für $\varphi = 0$ als erfüllt ansehen, bedeutet physikalisch, daß wir nur solche Grundströmungen w betrachten, die entweder vermöge äußerer Kräfte wirklich stationär sind, oder deren zeitliche Veränderung langsam gegen die der kleinen Schwingungen erfolgt.

Gleichung (7) ist in dieser Allgemeinheit schon von Noether a. a. O. abgeleitet. Sie ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für φ von der vierten Ordnung. Dem entspricht es, daß die Funktion φ vier Grenzbedingungen erfüllen muß; es müssen u und v , daher auch φ und φ' an den beiden Wänden verschwinden. Setzen wir $\beta/\alpha = c$, so daß c im wesentlichen die Wellengeschwindigkeit bedeutet, so läßt sich das mathematische Problem folgendermaßen formulieren:

Es sind die Lösungen der Gleichung

$$(7a) \quad (\varphi'' - \alpha^2 \varphi)(w - c) - \varphi w'' = \frac{i}{\alpha R} (\varphi''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi)$$

mit der Nebenbedingung, daß an den begrenzenden Wänden (etwa $y = 1$ und $y = -1$) $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ sein soll, zu untersuchen. Zu jedem Wert von α und R soll der zugehörige Wert von c und β berechnet werden; α sei der Einfachheit halber stets positiv. Je nachdem der imaginäre Teil von β positiv, Null oder negativ ist, haben wir es mit einer stabilen, ungedämpften oder labilen Schwingung zu tun. Es sind die Bedingungen für das Profil w aufzusuchen, unter denen Gleichung (7a) nur stabile, bzw. unter denen sie auch labile Schwingungen zuläßt.

Bevor wir zu den Lösungsmethoden übergehen, sei noch auf eine besondere Eigenschaft der Gleichung (7a) hingewiesen. Im Limes der reibungslosen Flüssigkeit $R = \infty$ verwandelt sich Gleichung (7a) in eine Differentialgleichung 2. Grades für φ .

$$(8) \quad (\varphi'' - \alpha^2 \varphi)(w - c) - \varphi w'' = 0.$$

Dem entspricht es, daß für $R = \infty$ nur noch zwei Grenzbedingungen zu befriedigen sind, welche besagen, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit, also v oder φ an beiden Wänden verschwinden soll, nicht mehr aber φ' .

Die Bedingungen für die Lösbarkeit von Gleichung (8) sind schon von Rayleigh¹⁾ ausführlich untersucht worden. Man kann, um eine einfache Bezeichnung einzuführen, „schwingungsfähige“ und „nichtschrwingungsfähige“ Grundströmungen unterscheiden, je nachdem Gleichung (8) eine Lösung mit reellem c besitzt, die den Grenzbedingungen genügt, oder nicht.²⁾ Gibt es Lösungen mit komplexem c , so wird, wie sich später zeigen wird, auch bei Berücksichtigung der Reibung die Stabilitätsfrage für diese Schwingungen schon durch (8) entschieden, die Schwingungen sind dann immer *labil*.

Man wird aber darüber hinausgehend zu der Vermutung geführt, daß das Profil w dann und nur dann unter Einfluß

1) Lord Rayleigh, Papers I. S. 361; III. S. 575, 594; IV. S. 203.

2) Hierbei genügt es aber keineswegs, das Profil durch Tangentenpolygone anzunähern, das Resultat hinsichtlich der möglichen Schwingungen würde dadurch völlig gefälscht.

der Reibung labile oder ungedämpfte Schwingungen zulassen wird, wenn es zu den schwingungsfähigen Grundströmungen gehört.

Diese Vermutung liegt um so näher, als sie sich an allen bisher untersuchten Profilen bestätigt hat.¹⁾ Trotzdem wird sie keineswegs dadurch begründet, daß Gleichung (8) im Limes $R = \infty$ aus Gleichung (7a) hervorgeht, denn es ist z. B. in den Arbeiten von Oseen²⁾ bewiesen, daß der Grenzübergang $R = \infty$ in den Differentialgleichungen schon mehrfach zu falschen Resultaten, besonders hinsichtlich der Grenzbedingungen der reibungslosen Flüssigkeit, geführt hat und daß man daher den Grenzübergang nur an den Integralen der Gleichung (7a) vornehmen darf. Außerdem ist es von vorneherein keineswegs zu entscheiden, ob die Reibung die ungedämpften Schwingungen von (8) im Sinne einer Dämpfung oder einer Anfachung abändert.

Wir werden im folgenden versuchen, unsere oben ausgesprochene Vermutung zu beweisen, indem wir zeigen, daß die schwingungsfähigen Systeme oberhalb eines bestimmten Wertes der Reynoldsschen Zahl im allgemeinen labilen Charakter, alle nichtschwingungsfähigen dagegen stabilen Charakter besitzen.

Durch diesen Satz wird das Problem der Stabilität eines Profils ganz wesentlich vereinfacht; denn für sehr kleine Werte von α lassen sich bekanntlich die Lösungen von (8) direkt hinschreiben.

§ 2. Die Lösungsmethoden und das allgemeine Verhalten der Integrale von (7a).

Die wichtigste Eigenschaft der Gleichung (7a), die eine näherungsweise Darstellung ihrer Lösungen erlaubt, besteht darin, daß R als sehr groß betrachtet werden kann. Es wird sich nämlich zeigen, daß, falls eine Labilitätsgrenze existiert, diese im allgemeinen bei sehr hohen Werten von R liegt. Da es andererseits physikalisch ganz unwahrscheinlich ist, daß bei kleinen Werten von R noch einmal Labilität des betreffenden Profils eintreten kann, so reicht es für unsere Zwecke zunächst aus, R als sehr groß anzusehen.

1) Vgl. auch L. Prandtl, Phys. Zeitschr. a. a. O.

2) Vgl. z. B. C. W. Oseen, Beiträge z. Hydr. Ann. d. Phys. 46. S. 231 u. 623. 1915.

Diese Annahme macht es möglich, die Lösungen von (7a) anzunähern durch Entwicklung nach negativen Potenzen von R bzw., wie sich zeigen wird, von $\sqrt{\alpha R}$. Ferner werden wir α als klein annehmen und die Lösungen gegebenen Falles nach positiven Potenzen von α^2 entwickeln.

Die beiden Entwicklungsmethoden nach $(\alpha R)^{-1/2}$ einerseits, nach α^2 andererseits, scheinen sich insofern zu widersprechen, als im ersten Falle αR als groß, im zweiten α^2 als klein angenommen wird. Der Widerspruch wird jedoch dadurch behoben, daß R im allgemeinen als außerordentlich groß betrachtet werden kann, so daß z. B. für $R = 2000$, $\alpha = 1/10$; $\alpha R = 200$, $\alpha^2 = 1/100$ wird, was für eine gute Konvergenz beider Entwicklungen völlig hinreicht. Die Konvergenzeigenschaften dieser Näherungsmethoden sind aber noch genauer zu betrachten. Die Untersuchung lehrt, daß die Reihen nach $(\alpha R)^{-1/2}$ im allgemeinen divergieren, daß sie aber den bekannten Charakter der semikonvergenten Reihen tragen, d. h. daß die Glieder zuerst abnehmen, dann wieder wachsen und daß man die bestmögliche Annäherung erhält, wenn man die Reihe beim kleinsten Glied abbricht. Unser Näherungsverfahren hat also ähnliche Konvergenzeigenschaften, wie z. B. die in der Astronomie verwendeten Reihen der Störungstheorie, deren Verhalten Poincaré, *Meth. nouv. d. l. mec. cel.* II ausführlich schildert.

Eine erhebliche Schwierigkeit für die Verwendung der semikonvergenten Entwicklungen liegt aber darin, daß sie in der Umgebung eines bestimmten Punktes ihre Gültigkeit verlieren, so daß es nicht ohne weiteres entschieden werden kann, in welcher Weise die Näherungslösungen auf beiden Seiten des Punktes aneinandergesetzt werden müssen, um ein bestimmtes Integral der Gleichung (7a) beiderseits anzunähern. Wir werden hierauf in § 3 ausführlich eingehen.

Die Entwicklung nach positiven Potenzen von α^2 scheint im allgemeinen wirklich zu konvergieren. Für spezielle Profile läßt sich diese streng beweisen (z. B. für das lineare Profil); eine Untersuchung über die Frage, unter welchen Bedingungen für das Profil w diese Konvergenz wirklich stattfindet, haben wir jedoch nicht ausgeführt.

Wir beginnen mit der Ableitung der Näherungslösungen der Gleichung (7a):

$$(7a) \quad (\varphi'' - \alpha^2 \varphi)(w - c) - w'' \varphi = \frac{i}{\alpha R} (\varphi''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi).$$

Zu diesem Zwecke setzen wir zunächst

$$(9) \quad \varphi = e^{\int g dy}, \quad g = \sqrt{\alpha R} g_0 + g_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha R}} g_2 + \dots$$

Die Entwicklung wollen wir auf die beiden höchsten Glieder in $\sqrt{\alpha R}$ beschränken. Es folgt:

$$\alpha R g_0^2 (w - c) + \sqrt{\alpha R} (g_0' + 2g_0 g_1) \cdot (w - c) = i \alpha R g_0^4 + i \sqrt{\alpha R} (4g_0^3 g_1 + 6g_0^2 g_0').$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß α^2 und w'' von der Größenordnung 1 oder jedenfalls $\ll \sqrt{\alpha R}$ seien. Es ergibt sich jetzt durch einfache Rechnung:

$$(10) \quad g_0 = \sqrt{-i(w - c)}, \quad g_1 = -\frac{5}{2} \frac{g_0'}{g_0}, \quad \int g_1 dy = -\frac{5}{2} \lg g_0.$$

Wir erhalten also zwei partikuläre Integrale der Gleichung (7a):

$$(11) \quad \varphi_{1,2} = (w - c)^{-5/4} e^{\pm \int \sqrt{-i\alpha R(w-c)} dy}.$$

Der Punkt y_0 soll dadurch festgelegt werden, daß für $y = y_0$ $w = c$ sei. y_0 kann also unter Umständen auch komplex sein. Das Vorzeichen der Wurzel soll so gewählt werden, daß für $w - c = -a e^{i\omega}$, $-i\alpha R(w - c) = \alpha R \cdot a e^{i(\omega + \frac{\pi}{2})}$ die Wurzel wird:

$$(\alpha R a)^{1/4} \cdot e^{i(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4})}.$$

Bemerkenswert an diesen beiden Integralen ist, daß α^2 in φ in dieser Näherung nicht vorkommt (d. h. nur in der Kombination αR , die man, wie aus Gleichung (7a) hervorgeht, in gewissem Sinne als die eigentliche Reynoldssche Zahl bezeichnen könnte).

Wie wir später sehen werden, bestimmen die beiden Integrale (11) das Verhalten von φ in der Grenzschicht und das Nichtvorkommen von α^2 in (11) bedeutet physikalisch, daß wir nur solche Schwingungen betrachten, deren Wellenlänge groß ist gegen die Grenzschichtdicke — was bei den empirisch beobachteten labilen Schwingungen sicher der Fall ist.

Zu einem vollständigen Lösungssystem von (7a) brauchen wir jedoch noch zwei weitere Integrale; naturgemäß werden wir dazu diejenigen nehmen, die durch Entwicklung nach Potenzen von $(\alpha R)^{-1}$ aus den Integralen der Gleichung (8) hervorgehen.

Zu diesem Ende lösen wir zunächst Gleichung (8) durch Entwicklung nach Potenzen von α^2 . Wir setzen also:

$$(8) \quad (\varphi'' - \alpha^2 \varphi)(w - c) - \varphi w'' = 0,$$

$$(12) \quad \varphi = \varphi^{(0)} + \alpha^2 \varphi^{(1)} + \alpha^4 \varphi^{(2)} + \dots$$

Daraus folgt:

$$\varphi^{(0)''}(w - c) - \varphi^{(0)} w'' = 0.$$

$$\varphi^{(1)''}(w - c) - \varphi^{(1)} w'' = \varphi^{(0)} \cdot (w - c),$$

$$\varphi^{(2)''}(w - c) - \varphi^{(2)} w'' = \varphi^{(1)} \cdot (w - c),$$

$$\dots \dots \dots$$

Es ergeben sich durch die Methode der Variation der Konstanten die beiden Integrale:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_3(R=\infty) &= (w - c) \left(1 + \alpha^2 \int \frac{dy}{(w - c)^2} \int dy (w - c)^2 + \dots \right), \\ \varphi_4(R=\infty) &= (w - c) \int \frac{dy}{(w - c)^2} \left(1 + \alpha^2 \int dy (w - c)^2 \int \frac{dy}{(w - c)^2} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Diese Integrale sind nun noch um Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1}$, ... usw. zu korrigieren, wenn sie der Gleichung (7a) genügen sollen.

Ohne die entsprechende Reihenentwicklung im einzelnen anzuschreiben, geben wir als Resultat φ mit den Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1}$ an:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_3 &= (w - c) \left\{ 1 + \alpha^2 \int \frac{dy}{(w - c)^2} \int dy (w - c)^2 + \alpha^4 \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\alpha R} \int \frac{dy}{(w - c)^2} \frac{d^2}{dy^2} (w - c) + \dots \right\}, \\ \varphi_4 &= (w - c) \int \frac{dy}{(w - c)^2} \left\{ 1 + \alpha^2 \int dy (w - c)^2 \int \frac{dy}{(w - c)^2} + \alpha^4 \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\alpha R} \frac{d^2}{dy^2} (w - c) \int \frac{dy}{(w - c)^2} + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Mit (11) und (14) ist ein vollständiges Lösungssystem der Gleichung (7a) näherungsweise gefunden.

Ehe wir dieses Lösungssystem zur Erfüllung der Grenzbedingungen anwenden, wird es zweckmäßig sein, wenn wir uns den physikalischen Sinn der vier Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ klar machen und einige Resultate vorwegnehmen, die wir erst später begründen können.

Die Integrale φ_1, φ_2 haben die Eigenschaft, bei den uns interessierenden großen Werten von R sehr rasch veränderlich zu sein, wie aus dem Exponenten der Ordnung $\sqrt{\alpha R}$ hervorgeht. Wenn also etwa φ_1 an der einen Wand von der Größenordnung 1 ist, so wird es ininigem Abstand von der Wand exponentiell verschwinden (an sich könnte es auch noch außerordentlich groß werden, doch dies wird naturgemäß durch die Grenzbedingungen verhindert). Das hat zur Folge, daß sich, von der unmittelbaren Umgebung der Wände abgesehen, φ aus φ_3 und φ_4 allein zusammensetzt, d. h. dem Verhalten von φ in der reibungslosen Flüssigkeit sehr ähnlich ist.

Daß α^2 in φ_1, φ_2 nicht explizit vorkommt (vgl. Gleichung (11)), wohl aber in φ_3, φ_4 (vgl. Gleichung (14)), muß physikalisch offenbar so gedeutet werden, daß bei der Annahme, α^2 sei nicht sehr groß ($\alpha^2 < \sqrt{\alpha R}$, vgl. Gleichung (7a) und (9)) die Wellenlänge zwar als unendlich groß gegen die Grenzschichtdicke, nicht aber gegen die Kanalbreite betrachtet werden kann. Der charakteristische Unterschied zwischen den „Grenzschichtintegralen“ φ_1, φ_2 einerseits, den der reibungslosen Flüssigkeit entsprechenden Integralen φ_3, φ_4 andererseits, spricht sich also in dem Auftreten bzw. Nichtauftreten von α^2 bezeichnend aus.

Was die Konvergenz der Entwicklung nach Potenzen von α^2 betrifft, so können wir hoffen, daß sie für Werte von α^2 von der Größenordnung 1 noch sehr wohl hinreicht, um eine gute Näherung zu ermöglichen, denn für ein lineares Profil gehen die Reihen für φ_3, φ_4 über in solche vom Typus der Potenzentwicklung von $\cos \alpha$, die in der Umgebung $\alpha = 1$ noch sehr rasch konvergiert.

Das Strömungsbild, das wir nach allen diesen Schlüssen erwarten müssen, entspricht den Ansätzen, die man in der Prandtl'schen Grenzschichttheorie macht. Mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung der Wände gehorcht die Bewegung sehr nahe den Differentialgleichungen der reibungslosen Flüssigkeiten. An den Wänden selbst aber haftet eine Grenzschicht,

deren Dicke von der Größenordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ ist. In dieser nimmt die Geschwindigkeit u gegen die Wand zu rasch gegen Null ab, während v auch außerhalb der Grenzschicht schon nahezu Null ist.

§ 3. Die Übergangssubstitutionen.

Wenn wir den Verlauf der Integrale von (7a) von der einen begrenzenden Wand bis zur anderen studieren wollen, so müssen wir damit rechnen, daß an einer Stelle $y = y_0$ im Kanal $w - c = 0$ ist (oder wenigstens der reelle Teil von $w - c$ Null ist), daß also die Wellengeschwindigkeit dort mit der Geschwindigkeit der Grundströmung übereinstimmt. In diesem Punkte verlieren die Näherungsformeln (11) und (14) für die Integrale von (7a) ihre Gültigkeit.

Es ist daher nötig, die Übergangssubstitutionen für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ zu kennen, die beim Übergang von $\Re(w - c) > 0$ zu $\Re(w - c) < 0$ anzuwenden sind. Zu diesem Ende entwickeln wir w und φ in der „Umgebung“ des kritischen Punktes y_0 nach Potenzen von $(\alpha R)^{-1/2}$ und setzen deshalb $y - y_0 = \eta \cdot (\alpha R)^{-1/2}$. Ferner nehmen wir an, daß der imaginäre Teil von y_0 von *kleinerer* Größenordnung als $(\alpha R)^{-1/2}$ sei. Ist er nämlich von *höherer* Größenordnung, so verstehen sich die Übergangssubstitutionen von selbst, weil dann im ganzen Bereich reeller y nirgends ein „kritischer Punkt“ auftritt. Ist er von *derselben* Größenordnung, so läßt sich das Verhalten von φ und w leicht aus den beiden eben angeführten Grenzfällen interpolieren. Wir können zunächst sogar $\Im(y_0) = 0$ setzen, weil sich φ in unserem Falle ($\Im(y_0) \ll (\alpha R)^{-1/2}$) nach Potenzen von $\Im(y_0)$ entwickeln läßt und fürs erste nur das Verhalten von φ für $\Im(y_0) = 0$ gebraucht wird.

Wir setzen also jetzt $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$, $\varepsilon = (\alpha R)^{-1/2}$; $w - c = \varepsilon \cdot a \eta + \varepsilon^2 b \eta^2 + \dots$

Dann entsteht aus (7a):

$$\varphi_0'''' + \varepsilon \varphi_1'''' + \dots = -i[(\varphi_0'' + \varepsilon \varphi_1'' + \dots) a \eta + \varepsilon \varphi_0'' b \eta^2 - 2\varepsilon \varphi_0 b] + \dots$$

Also in erster Näherung:

$$(15) \quad \varphi_0'''' = -i \varphi_0'' \eta a;$$

in zweiter Näherung:

$$(15a) \quad \varphi_1'''' = -i[\varphi_1'' \eta a + \varphi_0'' b \eta^2 - 2\varphi_0 b].$$

Für die Integrale φ_1, φ_2 Gl. (11) entnehmen wir aus

(15), daß sie sich im „kritischen Gebiete“ (η Größenordnung 1) wie die von Hopf beim linearen Profile gefundenen Integrale, d. h. wie gewisse Zylinderfunktionen verhalten. Wir können also jetzt schon schließen, daß die Übergangssubstitutionen für φ_1, φ_2 aus (11) bis auf Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ dieselben, wie beim linearen Profil sein müssen:

$$(16) \quad \begin{cases} \varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + i \varphi_2 \\ \varphi_1 - i \varphi_2 \rightarrow \varphi_1 \end{cases}$$

entsprechen einem Übergang von

$$\Re(w - c) < 0 \rightarrow \Re(w - c) > 0.$$

Für das Studium der Integrale φ_3, φ_4 in der Umgebung von $y - y_0 = 0$ reichen aber die bisherigen einfachen Rechnungen nicht aus, denn für diese würde die Näherungslösung (15) lauten $\varphi'' = 0$; aus (14) wissen wir aber, daß im Limes $R \rightarrow \infty$ φ_4' an der Stelle $y - y_0 = 0$ im allgemeinen logarithmisch unendlich wird. Die Gleichungen (15) und (15a) sind also in dieser Form ungeeignet zur Erfassung dieser Singularität.

Wir setzen jetzt vielmehr $\alpha = 0$ und $w''' = 0$ (d. h. wir brechen die Entwicklung von w mit dem 2. Gliede ab), integrieren aber sonst (7a) zunächst *exakt*. Dabei bemerken wir, daß $\varphi = w - c$ ein partikuläres Integral dieser vereinfachten Gleichung (7a) sein muß, und für φ machen wir daher den aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen geläufigen

Ansatz: $\varphi = (w - c) \int \psi dy$. Dann folgt aus

$$\varphi'''' = -i \alpha R (\varphi'' (w - c) - w'' \varphi)$$

für $\varphi = (w - c) \int \psi dy$:

$$\begin{aligned} \psi''' (w - c) + 4 \psi'' w' + 6 \psi' w'' \\ = -i \alpha R (2w' (w - c) \psi + (w - c)^2 \psi'), \end{aligned}$$

was nach nochmaliger Integration übergeht in:

$$(17) \quad \psi'' (w - c) + 3 \psi' w' + 3 \psi w'' = -i \alpha R ((w - c)^2 \psi - C).$$

C ist eine Integrationskonstante. Führt man jetzt wieder ein:

$$\eta = (y - y_0) (\alpha R)^{1/2}, \quad \varepsilon = (\alpha R)^{-1/2}, \quad w - c = \varepsilon a \eta + \varepsilon^2 b \eta^2,$$

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots,$$

so ergibt sich:

$$(17a) \quad \begin{cases} \psi_0'' a \cdot \eta + 3 \psi_0' a = -i (a^2 \eta^2 \psi_0 - C) \\ \psi_1'' a \eta + 3 \psi_1' a + \psi_0'' b \eta^2 + 6 \psi_0' b \eta + 6 \psi_0 b \\ \quad = -i (2a b \psi_0 \eta + a^2 \eta^2 \psi_1). \end{cases}$$

Diese Differentialgleichungen enthalten natürlich immer noch sämtliche Lösungen von (7a). Da wir speziell φ_4 studieren wollen (φ_3 verhält sich für $\alpha = 0$ im Punkte $y = y_0$ regulär), so suchen wir *diejenige* Lösung von (17a) aus, die sich in einem Abstand von y_0 , also für große $(w - c) \propto R$, wie $\frac{1}{(w - c)^2}$ verhält; denn wir wissen ja aus (14), daß φ_4 in einem Abstand von y_0 durch

$$(w - c) \int \frac{dy}{(w - c)^2}$$

gegeben ist. Es wird also nach (17a)

$$\psi_0 = \frac{C}{a^2 \eta^2}$$

und

$$(18) \quad \psi_1'' \eta + 3 \psi_1' = -i \left(\frac{2b}{a^2} C \eta + a \eta^2 \psi_1 \right).$$

ψ_1 ist wieder dadurch völlig bestimmt, daß es sich „im Unendlichen“ wie $-\frac{2bC}{a^2 \eta}$ verhalten soll.

Wenn wir nun nach den Übergangssubstitutionen für φ_4 (und φ_3) fragen, so ist damit folgendes gemeint: In den asymptotisch gültigen Darstellungen (14) für φ_3, φ_4 kommt immer das Integral $\int \frac{dy}{(w - c)^2}$ vor, das seinen Sinn verliert, wenn es über die Stelle $y = y_0$ ($w - c = 0$) hinweg zu erstrecken ist. In Wirklichkeit tritt aber eben an Stelle von $\frac{1}{(w - c)^2}$ in der Nähe des kritischen Punktes die Funktion ψ . Es kommt also alles auf das Verhalten von ψ (insbesondere ψ_1) in der kritischen Umgebung an. Ist dieses Verhalten, also auch die Größe des Integrals $\int \psi dy$ (erstreckt über die kritische Stelle hinweg) bekannt, so ist diese Kenntnis gleichbedeutend mit der Kenntnis der Übergangssubstitutionen für φ_3, φ_4 .

Die durch (18) und die Grenzbedingung im Unendlichen charakterisierte Lösung ψ_1 lautet:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1(\eta) = & -\frac{\pi b C}{3 a^2 \eta} \left\{ H_{1/2}^{(1)} \left(\frac{2}{3} (-i \alpha_0 \eta)^{3/2} \right) \int_{+\infty}^{\eta} H_{1/2}^{(2)} \eta^2 d\eta \right. \\ & \left. - H_{1/2}^{(2)} \int_{-\infty}^{\eta} H_{1/2}^{(1)} \eta^2 d\eta \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hierin treten die Hankelschen Zylinderfunktionen vom Index $\frac{2}{3}$ und dem Argument $\frac{2}{3} (-i \alpha_0 \eta)^{1/2}$ auf ($\alpha_0 = a^{1/2}$). Dabei ist das Vorzeichen von $(-i \alpha_0 \eta)^{1/2}$ so zu nehmen, daß $(-i \alpha_0 \eta)^{1/2}$

für $\eta = \frac{r e^{\frac{\pi i}{2}}}{\alpha_0}$ positiv wird. Eine nähere Untersuchung von (19) lehrt, daß sich ψ_1 in der ganzen oberen Halbebene und sogar noch in der unteren Halbebene teilweise, nämlich für $\eta = r e^{i\epsilon}$ in den Grenzen

$$-\frac{i\pi}{6} < \epsilon < \frac{7i\pi}{6}$$

im Unendlichen wie $-\frac{2bC}{a^3\eta}$ verhält, wenn α_0 oder a positiv ist. Ist a negativ, so vertauschen sich obere und untere Halbebene und es gilt

$$(20) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_1(r e^{i\epsilon}) = -\frac{2bC}{a^3\eta}, \quad \text{wenn} \begin{cases} \frac{5i\pi}{6} < \epsilon < \frac{13i\pi}{6} \\ a < 0, \end{cases}$$

$$\text{oder} \begin{cases} -\frac{i\pi}{6} < \epsilon < \frac{7i\pi}{6} \\ a > 0. \end{cases}$$

Daraus entnehmen wir das wichtige Resultat:

$$(21) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1 d\eta = \begin{cases} \frac{2bC}{a^3} i\pi & a > 0, \\ -\frac{2bC}{a^3} i\pi & a < 0. \end{cases}$$

Es sind also jetzt die Übergangssubstitutionen für φ_3 , φ_4 bis auf Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ genau auch für endliche Werte von α gefunden; denn wir wissen jetzt — und das ist hinreichend — was wir nach (21) unter dem Integral $\int \frac{dy}{(w-c)^2}$, erstreckt von $w-c < 0$ nach $w-c > 0$, zu verstehen haben.

Auch die Formeln (16) lassen sich aus (17) noch einmal ableiten. Denn den asymptotischen Lösungen (11) der Gleichung (7a) entsprechen die Integrale

$$(19a) \quad \frac{1}{\eta} H_{2/3}^{(1),(2)} \left(\frac{2}{3} (-i \alpha_0 \eta)^{1/2} \right)$$

der homogenen Gleichung (18) ($C=0$). Die Aufgabe, die Übergangssubstitutionen der „asymptotischen“ Integrale (11)

und (14) zu finden, ist hiermit in der für uns erforderlichen Genauigkeit (bis auf Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$) gelöst.

§ 4. Erfüllung der Grenzbedingungen und die Stabilität der dem Lösungssystem I entsprechenden Schwingungen.

Nachdem unsere bisherigen Betrachtungen von der Art des Profils ganz unabhängig waren — bis auf einige, die singulären Punkte betreffenden Einschränkungen, die dem Profil auferlegt werden mußten — wollen wir, um uns nicht in einer übergroßen Anzahl verschiedener Möglichkeiten zu verlieren, die Natur der Grundströmung weiter spezialisieren. Die Betrachtungen gelten jedoch viel allgemeiner. Wir nehmen also an, daß die begrenzenden Wände durch die Formeln $y = +1$; $y = -1$ dargestellt sind, daß ferner die Wand $y = 1$ gegen die andere eine Relativgeschwindigkeit in der positiven X -Richtung besitze (von der Größe $w(+1) - w(-1)$) und daß die Laminarströmung an den Wänden haften (was der Versuchsanordnung von Couette entspricht); daß schließlich im Gebiete $-1 < y < +1$, also in der Flüssigkeit, $\Re(w - c)$ einmal und nur einmal Null sei. Außerdem werden wir im ganzen Gebiete Stetigkeit für w und die Differentialquotienten von w voraussetzen und darüber hinausgehend noch annehmen, daß die Funktionen w, w', w'' usw. stets normale GröÙe besitzen, d. h. z. B. nicht an einzelnen Stellen groß werden von der Ordnung $(\alpha R)^{1/2}$.

Ferner betrachten wir zunächst für die folgenden Rechnungen α als so klein und αR als so groß, daß wir mit genügender Genauigkeit setzen können

$$(14a) \quad \begin{cases} \varphi_3 = w - c, \\ \varphi_4 = (w - c) \int_{-1}^y \frac{dy}{(w - c)^2}. \end{cases}$$

Die Festlegung der unteren Grenze des Integrals in φ_4 bedeutet offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit unserer Lösungen. Wir setzen dadurch vielmehr φ_4 als diejenige lineare Kombination von φ_3 und φ_4 fest, die an der Stelle $y = -1$ verschwindet. Sollte dort auch $w - c$ verschwinden, so tritt offenbar an Stelle von φ_4 die Funktion $\varphi_3 = w - c$, die jetzt für $y = -1$ Null wird.

Um die Grenzbedingungen zuerst an der Wand $y = -1$

zu befriedigen, bilden wir zwei Aggregate f_1, f_2 aus $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, für die wirklich $\varphi = \varphi' = 0$ ist für $y = -1$.

$$(22) \quad \begin{cases} f_1 = \varphi_4 + \frac{1}{g_0(-1)[w(-1) - c] - \frac{9}{4}w'(-1)} \left[\frac{\varphi_3}{w(-1) - c} - \frac{\varphi_1}{\varphi_1(-1)} \right], \\ f_2 = \varphi_4 - \frac{1}{g_0(-1)[w(-1) - c] + \frac{9}{4}w'(-1)} \left[\frac{\varphi_3}{w(-1) - c} - \frac{\varphi_1}{\varphi_1(-1)} \right]. \end{cases}$$

Hierbei verstehen wir unter g_0 von jetzt ab die Wurzel $\sqrt{-i\alpha R(w - c)}$, nicht, wie in (10), $\sqrt{-i(w - c)}$, um uns das Anschreiben des Faktors $\sqrt{\alpha R}$ zu ersparen.

Um die Grenzbedingungen auch an der anderen Wand zu erfüllen, muß man zwei Konstanten A und B so zu bestimmen suchen, daß

$$\begin{aligned} A f_1(+1) + B f_2(+1) &= 0, \\ A f_1'(+1) + B f_2'(+1) &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung für die Möglichkeit einer solchen Bestimmung lautet:

$$(23) \quad \begin{vmatrix} f_1(+1) & f_2(+1) \\ f_1'(+1) & f_2'(+1) \end{vmatrix} = 0.$$

Durch diese Bedingung wird c bzw. β festgelegt, wenn R und α gegeben sind. Es handelt sich also jetzt darum, die Gleichung (23) nach c aufzulösen und das Vorzeichen des imaginären Teils von β zu bestimmen. Gleichung (23) bildet das vollständige Analogon zur Sommerfeldschen Turbulenzgleichung für das lineare Profil.

Aus (16) entnehmen wir:

$$(24) \quad \begin{cases} f_1(+1) = \varphi_4(+1) + \frac{1}{g_0(-1)[w(-1) - c] - \frac{9}{4}w'(-1)} \left[\frac{\varphi_3(+1)}{w(-1) - c} - \frac{\varphi_1(+1) + i\varphi_2(+1)}{\varphi_1(-1)} \right], \\ f_1'(+1) = \varphi_4'(+1) + \frac{1}{g_0(-1)[w(-1) - c] - \frac{9}{4}w'(-1)} \left[\frac{\varphi_3'(+1)}{w(-1) - c} - \frac{\varphi_1'(+1) + i\varphi_2'(+1)}{\varphi_1(-1)} \right], \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} f_2(+1) = \varphi_2(+1) - \frac{1}{g_0(-1)[w(-1)-c] + \frac{9}{4}w'(-1)} \left[\frac{\varphi_2(+1)}{w(-1)-c} - \frac{\varphi_2(+1)}{\varphi_2(-1)} \right], \\ f_2'(+1) = \varphi_2'(+1) - \frac{1}{g_0(-1)[w(-1)-c] + \frac{9}{4}w'(-1)} \left[\frac{\varphi_2'(+1)}{w(-1)-c} - \frac{\varphi_2'(+1)}{\varphi_2(-1)} \right]. \end{cases}$$

Diese Werte von f_1, f_2, f_1', f_2' setzen wir in (23) ein, nehmen aber zuerst noch eine Abschätzung der Größe der einzelnen Glieder vor, um die Rechnung nicht durch Anschreiben unwesentlicher Glieder unnötig zu komplizieren. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß im allgemeinen entweder $\varphi_2(+1) \gg \varphi_2(-1)$ oder $\varphi_2(+1) \ll \varphi_2(-1)$ sein wird. Dies bewirkt der Faktor $\sqrt{\alpha R}$ im Exponenten von φ_1, φ_2 in (11), wenn nicht gerade

$$\Re \int_{+y_0}^{-1} \sqrt{-i(w-c)} dy = \Re \int_{y_0}^{+1} \sqrt{-i(w-c)} dy$$

sein sollte, was wir ausschließen.

Welcher der beiden Fälle eintritt, läßt sich nicht vorher entscheiden; im allgemeinen sind beide möglich und liefern beide Lösungen. Im Falle eines schiefsymmetrischen Profils gibt der eine Fall die zu dem des anderen symmetrischen Lösungen. Jedenfalls verhalten sich die beiden Möglichkeiten in prinzipieller Hinsicht ganz analog und es genügt daher, eine von beiden zu untersuchen. Wir nehmen also an:

$$\varphi_2(+1) \ll \varphi_2(-1),$$

d. h. (vgl. S. 585) der Punkt $w = c$ soll näher an $w = w(+1)$ als an $w = w(-1)$ liegen.

Daraus folgt, daß $\varphi_1(-1) \sim \frac{1}{\varphi_2(-1)}$ außerordentlich klein, also $\frac{1}{\varphi_1(-1)}$ sehr groß ist. Es bleiben daher in f_1 und f_1' nur die Glieder stehen, die $\varphi_1(-1)$ im Nenner haben, in f_2 und f_2' fallen die Glieder, die φ_2 enthalten, fort.

Aus (28) erhalten wir so:

$$(25) \quad \begin{cases} [\varphi_1(+1) + i\varphi_2(+1)] \\ \left[\varphi_1'(+1) - \frac{\varphi_2'(+1)}{[g_0(-1)[w(-1)-c] + \frac{9}{4}w'(-1)][w(-1)-c]} \right] \\ = [\varphi_1'(+1) + i\varphi_2'(+1)] \\ \left[\varphi_2(+1) - \frac{\varphi_1(+1)}{[g_0(-1)[w(-1)-c] + \frac{9}{4}w'(-1)][w(-1)-c]} \right] \end{cases}$$

Auch in dieser Form ist die Gleichung für c noch recht kompliziert. Wir vereinfachen daher (25) zunächst weiter, indem wir jetzt nicht nur Größen der Ordnung $e^{-V\alpha R}$, sondern auch solche der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ streichen.

Zu diesem Zwecke stellen wir fest, daß $g_0(+1)$ von der Ordnung $(\alpha R)^{1/2}$ ist — wir schließen also zunächst aus, daß $w(+1) - c$ sehr klein ist —, daß ferner:

$$\varphi_1'(+1) + i\varphi_2'(+1) = -\frac{5}{4} \frac{w'(+1)}{w(+1)-c} \{ \varphi_1(+1) + i\varphi_2(+1) \} + g_0(+1) \{ \varphi_1(+1) - i\varphi_2(+1) \}.$$

Von den Gliedern der Gleichung (25) behalten wir daher nur noch diejenigen bei, die mit dem Faktor $g_0(+1)$ multipliziert sind.

So entsteht das einfache Resultat:

$$[\varphi_1(+1) - i\varphi_2(+1)] \varphi_1(+1) = 0$$

oder

$$(26) \quad \left[e^{\int_0^{y=+1} 2\sqrt{V - i\alpha R(w-c)} dy} - i \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2} \right] = 0.$$

Diese Gleichung besitzt zwei völlig verschiedene Lösungssysteme:

$$\text{I. } e^{\int_0^{+1} 2\sqrt{V - i\alpha R(w-c)} dy} = i, \quad \text{II. } \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2} = 0.$$

Das System I stellt das vollkommene Analogon dar zu den Lösungen, die Hopf für das lineare Profil erhalten und a. a. O. § 4 ausführlich diskutiert hat. In der Tat zeigt sich, daß die

dem System I entsprechenden Schwingungen stets stabilen Charakter tragen.

Denn aus

$$(27) \quad 2 \int_{\frac{3}{2}}^{+1} \sqrt{-i \alpha R(w-c)} dy = i \text{ folgt:}$$

$$2 \int_{\frac{3}{2}}^{+1} \sqrt{-i \alpha R(w-c)} dy = \pi \left(\frac{1}{2} + 2n \right),$$

wo n eine positive (vgl. S. 585) ganze Zahl ist. Es ist leicht zu sehen, daß diese Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn $\alpha c = \beta$ einen positiv imaginären Teil besitzt. Also sind die durch (27) charakterisierten Schwingungen tatsächlich gedämpft, der Betrag der Dämpfung ist von der Größenordnung $w(+1) - c$ und braucht daher keineswegs klein zu sein.

§ 5. Das Lösungssystem II und die Bedingungen für die Labilität eines Profils.

Die Lösungen im System II sind identisch mit den Lösungen der Rayleighschen Gleichung (8) und genügen der Bedingung:

$$(28) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2} = 0$$

oder (vgl. die Bemerkung zu (14a) S. 592) ganz allgemein

$$\varphi_4 = (w-c) \int_{-1}^y \frac{dy}{(w-c)^2} = 0 \text{ für } y = +1 \text{ und } y = -1.$$

Die letztere Form unterscheidet sich von der ersteren in gewissen Ausnahmefällen, die nachher besprochen werden sollen; außerdem stellt (28) natürlich nur eine erste Näherung ($\alpha = 0$) dar. Für die Lösungen von (28) müssen jetzt vier verschiedene Möglichkeiten unterschieden werden: Entweder 1. besitzt (28) Lösungen mit komplexem c . Dann ist das Profil immer labil, da stets auch der konjugiert komplexe Wert zu c eine Lösung darstellt; oder 2. es gibt Lösungen von (28) mit reellem c . Dann bezeichnen wir mit Prandtl a. a. O. das Profil als „schwingungsfähig“. Dies kann nach (21) nur vorkommen, wenn an der Stelle ($w=c$) $w''=0$ ist, wenn also das Profil entweder einen Wendepunkt besitzt oder aus linearen

Stücken zusammengesetzt ist. Oder 3. es gibt reelle Werte von c , die wenigstens den reellen Teil von

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w - c)^2}$$

zu Null machen. Oder endlich 4. Es tritt keiner dieser drei Fälle ein, (28) besitzt keine Lösung. Im Fall (3) und (4) bezeichnen wir das Profil als „nicht schwingungsfähig“. Wir behaupten nun, daß Fall 1. stets *Labilität*, Fall 3. und 4. stets *Stabilität*, Fall 2. im allgemeinen *Labilität* des zugrunde gelegten Profils ergibt. Für 1. und 4. haben wir dies im vorhergehenden schon bewiesen. Im Fall 3. setzen wir $c = c_r + i c_i$, wo c_r denjenigen reellen Wert von c bedeutet, für den der reelle Teil von

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w - c)^2}$$

verschwindet. Dann wissen wir aus § 3, daß für $c_i \leq 0$ der imaginäre Teil des Integrals $\frac{2b}{|a^2|} \pi i$ wird, für $c_i > |(\alpha R)^{-1/2}|$

aber gleich $-\frac{2b}{|a^2|} \pi i$. Also muß es aus Stetigkeitsgründen (vgl. § 3) eine Stelle $c_i > 0$ geben, an welcher auch der imaginäre Teil des Integrals (28) verschwindet. Die vier so charakterisierten Lösungen von (28) liefern also eine Größe c mit positiv imaginärem Bestandteil, also *stabile* Schwingungen.

Der Fall 2. schließlich erfordert etwas ausführlichere Rechnungen. Bevor wir sie ausführen, bemerken wir, daß zu 2. auch zwei Lösungstypen von (28) gehören, die sich nicht in der Form

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w - c)^2} = 0$$

darstellen lassen. Wenn nämlich $w(+1) = w(-1)$ ist, so lautet eine Lösung von (28) $\varphi = w - w(+1)$; in der Tat ist hier $\varphi = 0$ für $y = +1$ und $y = -1$. Ferner kann es vorkommen, daß z. B. w' für $w = w(+1)$ unendlich wird. Dann ist auch

$$\varphi = (w - w(+1)) \int_{-1}^y \frac{dy}{[w - w(+1)]^2}$$

eine Lösung von (8), die den Grenzbedingungen genügt. Wir wollen hierauf nicht weiter eingehen, da dieser Fall im Teil II

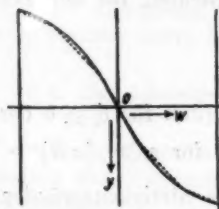
ausführlicher diskutiert werden wird. Wesentlich ist aber noch zu bemerken, daß der Unterschied zwischen Fall 2. und 3. sehr groß ist und daß es z. B. in keiner Weise genügt, nach Rayleigh ein krummes Profil durch ein Polygon anzunähern.

Zur Veranschaulichung dieses Unterschieds ist

$$\Re(J(c)) = \Re \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2}$$

als Funktion von c qualitativ in Fig. 1 dargestellt, wo die ausgezogene Kurve dem krummen, die gestrichelten Kurven

— Profil
- - - Näherungspolygon



x = Stellen, an denen
 $c = w_{\text{Knick}}$

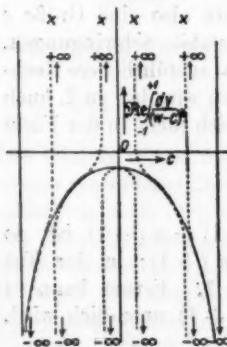


Fig. 1.

dem aus linearen Stücken bestehenden Profile entsprechen. Man sieht, daß jeder Knick eine neue Wurzel $\Re(J) = 0$ verursacht, weil J im Punkte $c = w_{\text{Knick}}$ beim geknickten

Profil sich wie $\frac{1}{w - c_{\text{Knick}}}$ verhält. Dies entspricht dem bekannten Rayleighschen Satz, daß es soviel Schwingungswurzeln wie Knicke gibt. Trotzdem besitzt das krumme Profil keine Schwingungswurzel. — Nach dieser Bemerkung kehren wir zu unserer Behauptung zurück, daß die schwingungsfähigen Profile im allgemeinen bei Berücksichtigung der Reibung labil werden.

Zum Beweise dieser Labilität kehren wir zur Gleichung (25) und zu den genaueren Lösungen im System II zurück. Da wir wissen, daß c bis auf Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ reell ist, können wir

$$\varphi_2(+1) \geq \varphi_1(+1)$$

annehmen. Vernachlässigen wir ferner die Glieder der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ in (25),

so erhalten wir nach leichten Umformungen:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2} = \frac{1}{g_0(-1)[w(-1)-c]^2} - \frac{1}{g_0(+1)[w(+1)-c]^2}$$

Setzen wir weiter $c = c_0 + \delta$, wo c_0 die Nullstelle von J , δ eine kleine Größe der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ bedeutet. α nehmen wir der Einfachheit halber positiv an, dann können wir auf der rechten Seite c durch c_0 ersetzen und die linke in eine Taylorsche Reihe nach δ entwickeln. So ergibt sich, wenn wir die Taylorsche Reihe mit dem 2. Gliede abbrechen, was wir als hinreichende Näherung voraussetzen:

$$J(c) = J(c_0) + \delta \frac{dJ}{dc} \Big|_{(c=c_0)}$$

und aus (25) wegen

$$J(c_0) = 0; \quad g_0 = \sqrt{-i\alpha R(w - c)}$$

(über das Vorzeichen vgl. S. 585).

$$\delta \frac{dJ}{dc} \Big|_{(c=c_0)} \cdot \sqrt{2\alpha R} = \frac{1-i}{[c_0 - w(-1)]^{1/2}} + \frac{1+i}{[w(+1) - c_0]^{1/2}}.$$

Hieraus folgt wegen $c_0 - w(-1) > w(+1) - c_0$ (c_0 soll näher an $w(+1)$ liegen!), daß der imaginäre Teil von δ , also auch der von c und von β dasselbe Vorzeichen hat, wie $\frac{dJ}{dc} \Big|_{(c=c_0)}$

und daß Schwingungen, welche einem negativen Werte von $\frac{dJ}{dc}$ entsprechen, *labilen* Charakter tragen. Wenn also unser teilweise lineares Profil noch die Eigenschaft hat, daß $\frac{dJ}{dc} < 0$

ist an der Stelle $w = c$, so ist es *labil*. Diese Bedingung $\frac{dJ}{dc} < 0$

ist aber sehr häufig, z. B. immer dann erfüllt, wenn der Punkt $w = c$ in der Nähe der einen Wand (z. B. $y = +1$) liegt und das Profil von der Stelle $w = c$ bis zum Rand linear verläuft.

Zusammenfassend folgern wir:

Die *Labilität* bzw. *Stabilität* eines Profils kann bei allen von uns bisher betrachteten Profilen schon durch das Verhalten derselben bei reibungsloser Flüssigkeit entschieden werden. Profile, die im letzteren Falle ungedämpfter Schwingungen fähig sind, werden bei Berücksichtigung der Reibung unter bestimmten Voraussetzungen *labil*. Die letzteren Profile müssen, wie oben gezeigt, ganz spezielle Eigenschaften haben, z. B. entweder teilweise aus linearen Stücken zusammengesetzt sein, oder sie müssen einen Wendepunkt $w'' = 0$ besitzen (vgl. oben).

Diese Profile der Gattung 2. sind aber zugleich die einzigen, die noch ein physikalisches Interesse beanspruchen können. Denn

nur sie besitzen ein Verhalten hinsichtlich ihrer Stabilität, das etwa den Vermutungen von Reynolds entspricht. Wir werden im folgenden zeigen, daß diese Profile wirklich im allgemeinen eine „kritische“ Reynoldssche Zahl besitzen (mit Ausnahme der geknickten Profile).

§ 6. Die Reynoldssche Zahl der Stabilitätsgrenze; numerische Rechnung am Parabelprofil.

Wenn also ein Profil gegeben ist, das bei reibungsloser Flüssigkeit ungedämpfte Schwingungen zuläßt und mit Reibung labil ist, so taucht die Frage auf: Welches ist der kleinste Wert der Reynoldsschen Zahl, für den Labilität eintritt? Um diese Frage zu beantworten, reichen die vereinfachten Gleichungen (25), (26) usw. nicht aus. Wir müssen zur Gleichung (23) und den Formen (11) und (14) für die Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ zurückkehren. Es ist aber natürlich ganz unmöglich, allgemein für ein beliebiges Profil w die kritische Reynoldssche Zahl als Funktion von w und Integralen über w darzustellen; unsere Aufgabe soll es nur sein, den Weg anzugeben, auf dem man zur kritischen Geschwindigkeit gelangt und dann an einem speziellen Beispiele die Rechnung durchzuführen.

Da in unseren letzten Rechnungen α und R nur in der Kombination αR vorgekommen sind (weil wir α^2 als klein annehmen), können diese Rechnungen auch bestenfalls nur einen kritischen Wert für αR , nicht aber für R allein liefern. Wir müssen daher zunächst das Verhalten der Wurzeln von (23) bei wachsendem α^2 untersuchen. Von den Wurzeln von (23) interessieren uns hierbei nur die im Lösungssystem II, welche der Gleichung $\varphi_4(+1) = 0$ genügen.

An Stelle von (28) müssen wir also die Gleichung

$$(28a) \left\{ \begin{aligned} \varphi &= (w-c) \int \frac{dy}{(w-c)^2} \left(1 + \alpha^2 \int dy (w-c)^2 \int \frac{dy}{(w-c)^2} + \dots \right) \\ \varphi &= 0 \text{ für } y = -1, y = +1 \end{aligned} \right.$$

diskutieren. Besteht das Profil, wie bei Rayleigh, aus linearen Stücken, so gibt es (vgl. S. 598) stets eine Wurzel von (28a) für jeden Knick und diese Wurzeln bleiben für jeden Wert von α^2 bestehen. Das geknickte Profil liefert also keinen

Maximalwert von α^2 und kann daher auch niemals auf eine kritische Reynoldssche Zahl führen.¹⁾

Anders ist dies, wenn (vgl. S. 597) eine Lösung von (28) bzw. (28a) mit reellem c deswegen möglich ist, weil entweder irgendwo im Profil $w'' = 0$ ist oder weil $w(+1) = w(-1)$, $\varphi = w - w(+1)$ eine Lösung von (28) darstellt. Diese letzteren Lösungstypen liefern nämlich immer nur für einen ganz bestimmten Wert von α^2 eine Lösung von (28a). Für $w'' = 0$ ist c schon festgelegt dadurch, daß eben $w = c$ sein soll für $w'' = 0$; also definiert die Gleichung (28a) einen ganz bestimmten Wert α^2 . Für den Fall $w(+1) = w(-1)$ aber gibt es offenbar nur für $\alpha^2 = 0$ eine Lösung von (28a).

Für diese Art von Lösungen der Gleichung (28) bzw. (28a) die im Limes $R = \infty$ durch einen ganz bestimmten Wert von α^2 charakterisiert sind, werden wir erwarten, daß sich bei Berücksichtigung der Reibung α auch nur um geringe Beträge von seinem „bestimmten“ Wert entfernen kann, das Auftreten eines *Maximalwertes* (und im Falle $w'' = 0$ auch eines *Minimalwertes*) für α ist bei diesen Profilen sehr verständlich. *Alle Schwingungen also, deren Wellenlänge kleiner ist, als eine bestimmte kritische Wellenlänge, sind in solchen Fällen für alle Werte von αR gedämpft.*

Nachdem eine obere Grenze für α^2 gefunden ist, wird man die ungefähre Größe für die untere Grenze von αR zu bestimmen suchen. Eine einfache Untersuchung der Gleichung (25) lehrt, daß wesentliche Veränderungen im imaginären Teil von c erst eintreten, wenn der Exponent von e in der Näherungsdarstellung (11) in $\varphi_1(+1)$, $\varphi_2(+1)$ auf Werte der Größenordnung 1 gesunken ist. Ist dies aber der Fall, so haben wir den kritischen Wert, bei dem der imaginäre Teil von c von negativen zu positiven Werten übergeht, sehr bald erreicht, wie auch das Zahlenbeispiel zeigen wird. Nehmen wir an, daß w zwischen $w = c_0$ (c_0 = reeller Teil von c) und $w(+1)$ wesentlich linear verläuft, so lautet daher die Bedingung für die ungefähre Größe von αR :

$$(29) \quad \frac{(\alpha R)^{1/2} [w(+1) - c_0]^{1/2}}{w'(+1)} \sim 1$$

1) Hierbei ist immer noch vorausgesetzt, daß R und αR groß und $\alpha \ll R$ sei. Möglicherweise treten also kritische Reynoldssche Zahlen dann auf, wenn diese Voraussetzungen nicht mehr gelten. Die betreffenden Reynoldsschen Zahlen R dürften aber dann bei so kleinen Werten liegen, daß sie physikalisch sicher keine Bedeutung haben.

oder

$$(29a) \quad (\alpha R)^{1/2} \sim \frac{w'(+1)^{1/2}}{w(+1) - c_0}.$$

Da $w(+1) - c_0$ in den uns interessierenden Fällen klein sein wird, so kann man aus (29) vermutungsweise auf große kritische Reynolds'sche Zahlen schließen. Zugleich bemerken wir hier, daß es für einen bestimmten Wert von R stets nicht nur einen Maximalwert, sondern auch einen Minimalwert für α der labilen Schwingungen geben wird. Dies folgt daraus, daß wir ja einen Minimalwert von αR (nicht R) gefunden haben.

Als numerisches Beispiel für unsere bisherigen allgemeinen Rechnungen wählen wir das Parabelprofil, weil es physikalisch am interessantesten ist. Es gehört zur Klasse der „schwingungsfähigen Profile“ vom Typus $w(+1) = w(-1)$.

Wir wollen auch hier nur die ebene Bewegung betrachten, d. h. nicht die Poiseuillesche Strömung in Rohren, sondern die Strömung, die zwischen zwei parallelen ruhenden Wänden ($y = +1$, $y = -1$) unter Einfluß eines konstanten Druckgradienten herrscht. Wir setzen also

$$(30) \quad w = 1 - y^2.$$

Aus der Symmetrie von w und $w - c$ läßt sich ableiten, daß φ eine gerade Funktion von y sein muß.¹⁾ Von den Lösungen der Gleichung (7a) greifen wir also zwei symmetrische partikuläre Integrale heraus und suchen die Grenzbedingungen an der einen Wand, etwa $y = -1$, zu befriedigen. Die an der anderen Wand sind dann von selbst erfüllt. Als das eine dieser symmetrischen Integrale kann offenbar einfach φ_3 genommen werden. Für das andere wählen wir:

$$\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(0)} + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_2(0)}.$$

1) Zerlegt man φ in einen in y geraden und einen ungeraden Teil, so muß, wegen der Symmetrie von $w - c$ und w , jeder Teil von φ für sich der Differentialgleichung (7a) und den Grenzbedingungen genügen. Für die allgemeine Stabilitätsuntersuchung des Profils $1 - y^2$ ist es daher ausreichend, die beiden Fälle „ φ gerade“ und „ φ ungerade“ getrennt und nur diese beiden Fälle zu behandeln. Es ist aber leicht zu sehen, daß die Annahme symmetrischer Schwingungen, d. h. „ φ ungerade“ zu keiner Lösung von (28) und daher nicht zu labilen Schwingungen führt. Die Annahme „ φ gerade“ genügt also zur Stabilitätsuntersuchung. Dies ist insofern bemerkenswert, als hiernach alle symmetrischen Schwingungen stabil und nur unsymmetrische Störungen labil sind.

Wie aus (29a) hervorgeht, wird c bei unserem Profil in Nähe der kritischen Geschwindigkeit klein sein von der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$, wir werden also in den folgenden Rechnungen Glieder von höherer als erster Ordnung in c streichen. Ferner stellen wir fest, daß $\varphi_2(0) \geq \varphi_1(0)$ sein wird, so daß sich in der Umgebung von $w = 0$ und $w = c$ die zweite symmetrische Funktion φ einfach auf $\varphi_1(y)$ reduziert. Aus (16) geht dann hervor, daß wir zur Befriedigung der Grenzbedingungen für $y = -1$ die beiden Integrale φ_3 und $\varphi_1 - i\varphi_2$ zur Verfügung haben. Gleichung (23) geht damit über in

$$(31) \quad \begin{vmatrix} \varphi_3(-1) & \varphi_1(-1) - i\varphi_2(-1) \\ \varphi_3'(-1) & \varphi_1'(-1) - i\varphi_2'(-1) \end{vmatrix} = 0.$$

In φ_3 ist hierbei als untere Grenze für die auftretenden Integrale immer $y = 0$ zu nehmen, um die Symmetrie von φ_3 zu gewährleisten. In φ_3 werden wir ferner nur bis zu Größen der Ordnung α^4 entwickeln und bei der Entwicklung nach $(\alpha R)^{-1}$ mit den Gliedern der Ordnung $(\alpha R)^{-1}$ abbrechen. Wir schreiben nun (31) in der Form

$$(32) \quad \frac{\varphi_1'(-1) - i\varphi_2'(-1)}{\varphi_1(-1) - i\varphi_2(-1)} = \frac{\varphi_3'(-1)}{\varphi_3(-1)}.$$

Setzt man (11) und (14) ein, so ergibt sich

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{e^{\frac{-1}{2\int_0^y V^{-i\alpha R(w-c)} dy}} + i\sqrt{i\alpha R c} = -\frac{9}{2c}}{e^{\frac{-1}{2\int_0^y V^{-i\alpha R(w-c)} dy}} - i} \\ & + \frac{\frac{\alpha^3}{c^2} \left[\int_0^{-1} dy (w-c)^2 + \alpha^2 \dots + \frac{i}{\alpha R} \dots \right]}{1 + \alpha^2 \int_0^{\frac{-1}{2\int_0^y V^{-i\alpha R(w-c)} dy}} \frac{dy}{(w-c)^2} \int_0^y dy (w-c)^2 + \alpha^4 \dots + \frac{i}{\alpha R} \dots} \end{aligned} \right.$$

Da c sehr klein wird, nehmen wir in erster Näherung w von 0 bis c als linear an: $w \sim 2(y+1)$. Dann wird

$$(34) \quad \int_0^{-1} \sqrt{c-w} dy = -\frac{1}{3} c^{3/2}.$$

Setzen wir $z = \frac{1}{3} c^{2/3} \cdot (2\alpha R)^{1/2}$, so entsteht aus (33)

$$(35) \quad \frac{e^{-(1+i)z} + i}{e^{-(1+i)z} - i} \cdot \frac{3z(1+i)}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{\alpha^2}{c} \frac{\int_0^{-1} dy(w-c)^2 + \dots}{1 + \alpha^2 \int \dots}$$

Diese Gleichung ist zu (26) völlig analog. Uns interessiert vor allem der Grenzwert R bzw. z , bei dem die labilen Schwingungen sich in stabile verwandeln, also der imaginäre Teil von c gerade Null ist. Dieser Grenzwert z wird natürlich noch von α abhängen. Wir nehmen also jetzt c als *reell* an und erhalten dadurch den Grenzwert von z bzw. R als Funktion von α . Den Minimalwert von R auf dieser $R(\alpha)$ -Kurve wird man als charakteristische Reynoldssche Zahl für das Parabel-

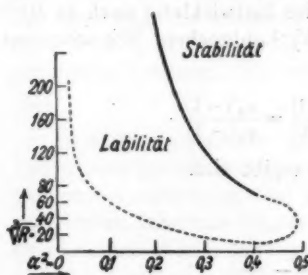


Fig. 2.

meln (11) verwendet. Die kritische Reynoldssche Zahl bezeichnet eben gerade das Gebiet, in welchem die asymptotischen Formeln ihre Gültigkeit verlieren. Da dieser Umstand zu sehr komplizierten numerischen Rechnungen führen würde und wir (vgl. § 7) allgemein der hier charakterisierten Art von Labilität keine wesentliche physikalische Bedeutung beimessen können, haben wir zur Berechnung des unteren Teiles (in Fig. 1 gestrichelt) der Kurve $R = R(\alpha)$ rohe Schätzungen benutzt, die keinen Anspruch darauf machen können, quantitative Ergebnisse zu liefern. Das qualitative Verhalten der Kurve wird aber wohl richtig wiedergegeben. Wir entnehmen also aus der Fig. 2:

profil ansprechen. Die Durchrechnung zeigt nun, daß man durch die Form (35) der Stabilitätsgleichung nur den oberen Teil der Kurve $R = R(\alpha)$ (in der Fig. 2 ausgezogen) erhält — was ja nach den Betrachtungen von § 6 zu erwarten war, daß man aber den unteren Teil der Kurve $R = R(\alpha)$ nur berechnen kann, wenn man für φ_1, φ_2 andere Näherungen [vgl. (19a)] als die asymptotischen Form-

1. Es gibt sowohl einen Maximalwert von α , wie einen Minimalwert von R , nach deren Über- bzw. Unterschreitung die Labilität aufhört.

2. Für einen bestimmten Wert von R existiert sowohl ein Maximal- wie auch ein Minimalwert von α ; innerhalb dieser Werte herrscht *Labilität*, außerhalb *Stabilität*.

3. Der Maximalwert von α liegt etwa bei $\alpha = 0,7$ ($\alpha^2 = \frac{1}{2}$). Der Minimalwert von R bei Größen der Ordnung 10^3 . Eine einigermaßen genaue Berechnung dieses Minimalwertes aus der Figur ist nicht möglich.

§ 7. Physikalische Diskussion der Resultate des Teiles I.

Fassen wir noch einmal ausführlich alle Ergebnisse zusammen, die wir für das Stabilitätsproblem gefunden haben. In erster Linie hat sich im Verlaufe der Rechnung gezeigt, daß man allgemein die Frage nach der Stabilität eines Profils bei reibender Flüssigkeit entscheiden kann, wenn man, wie Lord Rayleigh, den Grenzfall reibungsloser Flüssigkeit (Gleichung 8) behandelt. Profile, die dann, d. h. für $R = \infty$ labil sind, bleiben dies auch für hinreichend große endliche Werte von R (§ 4) — wie dies wohl von vornherein zu erwarten war. Ebenso erweisen sich Profile, die im reibungslosen Falle *keiner* Schwingungen fähig sind, als *stabil* (§ 4) und Profile, die bei der Untersuchung durch Gleichung (8) *ungedämpfte* Schwingungen zulassen, im allgemeinen als *labil* (§ 5). Dieser letztere Fall ist offenbar der einzige, der physikalisch gegenüber der reibungslosen Hydrodynamik etwas Neues bedeutet. Wir müssen aber hervorheben, daß er, entgegen dem, was man aus Rayleighs Arbeiten zunächst schließen möchte, einen *Ausnahmefall* darstellt. Wenn man von den Möglichkeiten $w(+1) = w(-1)$, $w'_{\text{Rand}} = \infty$ (§ 5) absieht, so ist es für das Eintreten dieses Ausnahmefalls *notwendige* Bedingung, daß irgendwo in der Flüssigkeit $w'' = 0$ ist. Die von Rayleigh eingeführten geknickten, aus linearen Stücken bestehenden Profile gehören zu diesen Ausnahmeprofilen; hieraus ist aber nur zu schließen, daß eben gekrümmte Profile zum Zwecke der Stabilitätsuntersuchung *nicht* nach Rayleigh durch Polygone angenähert werden dürfen (S. 598). Auch für überall gekrümmte Profile ($w'' \neq 0$) findet man allerdings (§ 5) bei Benützung der Differentialgleichungen mit Reibungsgliedern eventuell Schwin-

gungen, die für jeden Wert von α R gedämpft sind, bei denen aber im Limes $R = \infty$ der Betrag der Dämpfung wie $(\alpha R)^{-1/2}$ gegen Null geht; man hat also auch hier für $R = \infty$ ungedämpfte Schwingungen. Diese Schwingungswurzeln gehen aber verloren, wenn man die vereinfachte Differentialgleichung (8) ohne Reibungsglieder zugrunde legt. Insofern liegt also auch hier keine Ausnahme der Regel vor, nach welcher dann, wenn die reibungslose Gleichung (8) ungedämpfte Schwingungen zuläßt, die Berücksichtigung der Reibung eine Anfachung ergibt. Die Möglichkeit ungedämpfter Schwingungen für die Gleichung (8) muß aber, wie oben gesagt, als Ausnahmefall betrachtet werden. Das Parabelprofil gehört zu diesen Ausnahmeprofilen (§ 6). Fragen wir bei den „labilen Profilen“ weiter nach dem Wertebereich für R , innerhalb dessen Labilität stattfindet, so zeigt sich, daß auf „kritische Reynoldssche Zahlen“ auch im allgemeinen nur Profile der letzten Klasse führen können, d. h. nur solche, die ohne Reibung ungedämpfte Schwingungen zulassen. Von diesen lieferten aber die Rayleighschen „geknickten Profile“ dennoch keine (vgl. auch S. 601, Anm. 1) kritische Reynoldssche Zahl. Bei diesen gibt es nämlich wohl einen Minimalwert von αR , nicht aber einen Maximalwert von α , also auch keinen Minimalwert von R für die Labilität (§ 6). Nur diejenigen Profile der letzten Klasse, bei denen im reibungslosen Falle nur ein bestimmter Wert von α auf ungedämpfte Schwingungen führt (z. B. die Typen $w'' = 0$ für $w = c$), $w(+1) = w(-1)$, ergeben einen Maximalwert von α und einen Minimalwert von αR , also auch einen Minimalwert für R . Für einen bestimmten Wert von R gibt es daher bei diesen Profilen sowohl einen Maximal- wie einen Minimalwert von α für die labilen Schwingungen. Alle diese Resultate sind in Übereinstimmung mit den bisherigen Stabilitätsuntersuchungen hydrodynamischer Profile.¹⁾

Es fragt sich jetzt, wie sich experimentell diese mathematischen Resultate äußern werden. Es erscheint verwunderlich, daß sich empirisch die stabilen (z. B. das Couettesche²⁾

1) Vgl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten.

2) Vgl. jedoch hierzu die interessanten Stabilitätsuntersuchungen der Couetteschen Bewegung gegen dreidimensionale Störungen. G. J. Taylor, *Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders*. Phil. Transact. of the Royal Society London **223**. S. 289–343. 1922.

und die labilen (z. B. das Poiseuillesche) Profile ganz gleich verhalten. Oberhalb einer bestimmten Reynoldsschen Zahl tritt bei hinreichenden Störungen Turbulenz ein; macht man die Störungen möglichst klein, so läßt sich das Laminarprofil bei beliebig hohen Reynoldsschen Zahlen erhalten. Besonders die letztere Tatsache, die von Ekman (a. a. O.) am Parabelprofil geprüft worden ist, scheint bei den labilen Profilen im Widerspruch zur Theorie zu stehen. Es ist aber leicht zu erkennen, daß dieser Widerspruch nur scheinbar ist.¹⁾ Je kleiner nämlich die äußeren Störungen sind, um so länger dauert es (besonders bei hohen Reynoldsschen Zahlen, da die Anfachung von der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ ist (vgl. § 5), bis sie die Bewegung merklich beeinflussen; bei der Strömung in Rohren wird man also diesen Zeitpunkt immer so weit hinausschieben können, daß die betreffende Flüssigkeitsmenge, um deren Stabilität es sich handelt, das Rohr schon wieder verlassen hat, wenn ihre Labilität in Erscheinung tritt. Die von uns berechnete Reynoldssche Zahl könnte also nur an in sich geschlossenen Rohren geprüft werden, bei denen immer dieselbe Flüssigkeitsmenge strömt.²⁾ Die Versuche von Schiller (a. a. O.) andererseits, durch die gezeigt wird, daß es unterhalb einer bestimmten Reynoldsschen Zahl *nur* Laminarbewegung gibt, können durch Stabilitätsuntersuchungen überhaupt nicht erfaßt werden, da man hier gar nicht als ursprüngliche Bewegung die laminare hat, sondern da es sich nur um die Existenz oder Nichtexistenz einer turbulenten Bewegungsform dabei handelt. Jedenfalls ist aus allen diesen Betrachtungen nur zu schließen, daß sich durch Stabilitätsbetrachtungen allein das Turbulenzproblem eben durchaus nicht lösen läßt.

Immerhin können uns die vorhergehenden Untersuchungen auch für das eigentliche Ziel, die Berechnung der turbulenten

1) Auf diese Möglichkeit, die Ekmanschen Versuche als eine Art Anlaufeffekt aufzufassen, hat mich Hr. Professor Prandtl hingewiesen, dem ich hierfür und für viele andere wertvolle Hinweise an dieser Stelle den herzlichsten Dank aussprechen möchte.

2) Vielleicht sind aber die Störungen der Stabilität, die Ruckes a. a. O. bei ziemlich kleinen Reynoldsschen Zahlen beobachtet, durch die Labilität nach § 7 hervorgerufen. Dies wäre dann sehr wohl denkbar, wenn die kritische Reynoldssche Zahl nach § 7 unter derjenigen liegt, bei welcher zum ersten Male Turbulenz (vgl. Teil II) möglich ist.

Bewegung, wesentliche qualitative Ergebnisse liefern. Wenn wir nämlich die turbulente Bewegung auffassen als eine bestimmte Grundströmung mit überlagerten *ungedämpften* Schwingungen, so können wir aus unseren Rechnungen schließen, daß der Minimalwert R , für den dieser Bewegungstypus möglich ist, wahrscheinlich ebenfalls bei Werten der Größenordnung 10^3 liegt; daß die Wellenlänge der ungedämpften Schwingungen bei $2\pi h/2$, nämlich α bei Werten der Ordnung 1 liegt und daß α für ein gegebenes R zwischen bestimmte, eventuell sehr enge Grenzen eingeschlossen ist; daß ferner diese Schwingungen, wie aus der Kleinheit von $w (+1) - c$ zu schließen ist, den Charakter einer Wandstörung haben. Diese qualitativen Ergebnisse sind von der speziellen Form der Grundströmung ganz unabhängig. Über solche qualitativen Anhaltspunkte hinaus aber liefern die bisherigen Rechnungen nichts, was uns der eigentlichen Lösung des Turbulenzproblems näherbrächte.

II. Teil: Die turbulente Bewegung.

§ 1. Formulierung des mathematischen Problems.

Diejenige Reynoldssche Zahl, die man für gewöhnlich als die „kritische“ bezeichnet, die z. B. in den Versuchen von Schiller gemessen wird und die den Eintritt der Turbulenz bei hinreichend großen Störungen angibt, hat mit Stabilitätsfragen und mit der Laminarströmung nichts zu tun; sie ist durchaus eine charakteristische Konstante der *turbulenten* Bewegung. Ebenso lassen das Blasius'sche Widerstandsgesetz und die aus ihm abgeleitete bekannte Folgerung, daß die turbulente Geschwindigkeit in der Nähe einer Wand mit der $1/7$ ten Potenz der Wandentfernung anwächst, deutlich erkennen, daß die sogenannte „turbulente“ Bewegung ihre eigenen wohl definierten Gesetzmäßigkeiten hat und daß sie eine zweite mögliche Bewegungsform der reibenden Flüssigkeiten darstellt. Zur Lösung des Turbulenzproblems kann man also nur versuchen die turbulente Bewegung ihrer Undefiniertheit zu entkleiden und sie soweit zu idealisieren, bis sie der mathematischen Analyse durch die Stokesschen Gleichungen zugänglich wird.

Das „Turbulenzproblem“ der Hydrodynamik ist ein Problem der energetischen, nicht der dynamischen Stabilität. Es gibt zwei verschiedene Bewegungsformen der reibenden

Flüssigkeit, von denen jede einen bestimmten Wertebereich der Reynoldsschen Zahl besitzt, innerhalb dessen sie möglich ist. Die Laminarströmung ist möglich von $R = 0$ bis $R = \infty$, wird aber unter Umständen oberhalb eines bestimmten Wertes von R dynamisch labil. Die turbulente Bewegung dagegen existiert erst oberhalb eines bestimmten kritischen Wertes von R , ist dann aber immer¹⁾ energetisch stabiler als die Laminarbewegung. In demjenigen Bereich von R , in welchem beide Bewegungsformen möglich sind, kann man daher stets die Flüssigkeit aus dem laminaren Zustand durch hinreichend große Störungen, in den turbulenten Zustand „herunterfallen“ lassen.

Um die turbulente Bewegung näherungsweise mathematisch behandeln zu können, fassen wir wieder die Strömung zwischen zwei parallelen Wänden ins Auge und machen zunächst folgende Annahmen²⁾: Die Strömung soll a) um die X -Achse symmetrisch, die begrenzenden Wände in Ruhe sein; sie soll b) periodisch in der X -Richtung mit der Periode $2\pi/\alpha$ und c) periodisch in der Zeit mit der Periode $2\pi/\beta$ sein. d) Alle Störungen sollen sich mit der Geschwindigkeit β/α relativ zur X -Achse fortpflanzen, d. h. wenn wir die Bewegung in eine Fourierreihe entwickeln, so sollen in den Exponenten von e nur Vielfache von $i(\beta t - \alpha x)$ vorkommen.⁴⁾

Die Fourierentwicklung der Stromfunktion soll also lauten:

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi &= \varphi_0(y) + \varphi_1(y) e^{i(\beta t - \alpha x)} + \overline{\varphi_1(y)} e^{-i(\beta t - \alpha x)} \\ &\quad + \varphi_2(y) e^{2i(\beta t - \alpha x)} + \dots \end{aligned} \right.$$

Die mathematische Aufgabe besteht dann in der Ermittlung der (nach a) ungeraden Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$

1) Vgl. F. Noether, a. a. O.

2) Auch dieser Ansatz, der eine einfache Verallgemeinerung des Sommerfeldschen Stabilitätsansatzes darstellt, wurde zur Untersuchung der turbulenten Bewegung selbst von F. Noether: Zur Theorie der Turbulenz, Jahresber. d. deutsch. Math. Vereins 23. S. 138. 1914 ohne weitergehende Folgerungen angegeben.

3) Zur Annahme eines bestimmten α berechtigt uns das Ergebnis von Teil I, daß α zwischen bestimmte Grenzen eingeschlossen ist, die insbesondere in der Nähe des Minimalwertes von R sehr eng sind.

4) Wir brauchen nicht hervorzuheben, daß die wirklichen Bewegungsvorgänge zweifellos viel komplizierter sind; trotzdem kann man wohl erwarten, daß diese Ansätze qualitative Aussagen über die Turbulenz gestatten.

($\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \dots$ konjugiert zu φ_1, φ_2). Der Grad der Konvergenz der Reihe (36) ist zunächst völlig unbekannt, die Konvergenzfrage kann erst entschieden werden nach der Berechnung von $\varphi_0, \varphi_1 \dots$. Wollen wir die Genauigkeit bis zur n -ten Näherung treiben, d. h. wollen wir $\varphi_0 \dots \varphi_n$ berechnen, so bekommen wir offenbar $(n+1)$ simultane Differentialgleichungen für die $(n+1)$ unbekannten Funktionen $\varphi_0 \dots \varphi_n$. Im folgenden werden wir teils der ersten, teils der zweiten Näherung bedürfen. Wir gehen also mit dem Ansatz (36) in Gleichung (4) ein, vergleichen beiderseits die Koeffizienten der periodischen Funktionen und brechen mit dem Gliede $e^{2i(\beta t - \alpha x)}$ und daher mit φ_2, φ_2 ab. Für φ_0' schreiben wir (wie in (6) für Φ') w . So entstehen drei simultane Differentialgleichungen (die gleichzeitig entstehenden konjugierten Gleichungen brauchen wir nicht hinzuschreiben):

$$(37) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} \left[(\varphi_1' \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1' \varphi_1) + 2(\varphi_2' \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_2' \varphi_2) \right] &= \frac{i}{\alpha R} w'', \\ (\varphi_1'' - \alpha^2 \varphi_1) \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - \varphi_1 w'' - \varphi_2' (\bar{\varphi}_1'' - \alpha^2 \bar{\varphi}_1) \\ &\quad - 2 \varphi_2 (\bar{\varphi}_1''' - \alpha^2 \bar{\varphi}_1') + 2 \bar{\varphi}_1' (\varphi_2'' - 4 \alpha^2 \varphi_2) \\ &\quad \quad \quad + \bar{\varphi}_1 (\varphi_2''' - 4 \alpha^2 \varphi_2') \\ &= \frac{i}{\alpha R} (\varphi_1'''' - 2 \alpha^2 \varphi_1'' + \alpha^4 \varphi_1), \\ (\varphi_2'' - 4 \alpha^2 \varphi_2) \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - w'' \varphi_2 + \frac{1}{2} (\varphi_1' \varphi_1'' - \varphi_1 \varphi_1''') \\ &= \frac{i}{2 \alpha R} (\varphi_2'''' - 8 \alpha^2 \varphi_2'' + 16 \alpha^4 \varphi_2). \end{aligned} \right.$$

Von diesen Gleichungen läßt sich die erste zweimal integrieren und liefert:

$$(37a) \quad \varphi_1' \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1' \varphi_1 + 2(\bar{\varphi}_2 \varphi_2' - \bar{\varphi}_2' \varphi_2) = \frac{i}{\alpha R} (w' - C - C_1 y).$$

C und C_1 bedeuten willkürliche Integrationskonstanten.

Da die linke Seite von (37a) und w nach Forderung (a) ungerade in y sind, so muß in unserem Falle C verschwinden.

Gehen wir von der zweiten auf die erste Näherung zurück, so reduziert sich unser Gleichungssystem auf zwei simultane Differentialgleichungen für w und φ_1 :

$$(38) \begin{cases} \varphi_1' \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1' \varphi_1 = \frac{i}{\alpha R} (w' - C_1 y), \\ (\varphi_1'' - \alpha^2 \varphi_1) \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - w'' \varphi_1 = \frac{i}{\alpha R} (\varphi_1'''' - 2\alpha^2 \varphi_1'' + \alpha^4 \varphi_1). \end{cases}$$

Einschaltungsweise wollen wir uns jetzt überlegen, was an Stelle von (38) tritt, wenn wir nicht eine um die X-Achse symmetrische Strömung (Forderung a), d. h. die Strömung einer Flüssigkeit unter Druckgefälle zwischen zwei ruhenden Wänden, sondern eine um die X-Achse antisymmetrische Strömung (d. h. Strömung zwischen zwei relativ zueinander bewegten Wänden ohne Druckgefälle wie beim Couetteschen Fall) betrachten. Forderung (b) und (c) sollen bestehen bleiben. Der Ansatz (36) wird dann nicht mehr genügen, da φ_1, φ_2 usw. bei beliebigem β/α keine geraden Funktionen mehr sind; wir müssen, um das ganze Strömungsbild ungerade zu erhalten, auch noch die symmetrischen Schwingungen der Form $e^{i(-\beta t - \alpha x)}$ in den Ansatz für ψ aufnehmen d. h. ψ muß beginnen mit den Gliedern

$$\varphi_0 + \varphi_1(y) e^{i(\beta t - \alpha x)} + \varphi_1(-y) e^{-i(\beta t + \alpha x)} + \overline{\varphi_1(y)} e^{-i(\beta t - \alpha x)} + \dots$$

Das hat zur Folge, daß in ψ schließlich alle Glieder der Form $e^{i(\alpha \beta t - \alpha x)}$ auftreten (Wegfallen der Forderung (d)).

An Stelle von (38) ergibt sich:

$$(39) \begin{cases} \overline{\varphi_1(y)} \varphi_1(y)' - \overline{\varphi_1(y)'} \varphi_1(y) + \overline{\varphi_1(-y)} \varphi_1(-y)' - \overline{\varphi_1(-y)'} \varphi_1(-y) = \frac{i}{\alpha R} (w' - C), \\ (\varphi_1'' - \alpha^2 \varphi_1) \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - w'' \varphi_1 = \frac{i}{\alpha R} (\varphi_1'''' - 2\alpha^2 \varphi_1'' + \alpha^4 \varphi_1). \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen des Systems (38) bzw. (39) haben eine einfache anschauliche Bedeutung.

Die zweite Gleichung ist nichts anderes, als unsere frühere „Stabilitätsgleichung“ (7), welche die Amplitude der einer Grundströmung w überlagerten Schwingung bestimmt und die Grundlage für unsere Untersuchungen im Teil I bildete. Die erste

Gleichung aber stellt den Impulssatz dar. Die linke Seite dieser Gleichung gibt nämlich im wesentlichen den durch die turbulente Wirbelung im Mittel übertragenen Impuls an¹⁾, das Glied mit w' rechts stellt die laminare Impulsübertragung dar, die Konstante C bzw. $C_1 y$ ist die „Konstante“ des Impulssatzes.

An den Wänden ist wegen der Grenzbedingungen $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$. Also ist dort $w' = C$ bzw. $= C_1 y_{\text{wand}}$; an den Wänden überwiegt also der laminare Impulstransport den turbulenten, w'_{wand} wird im allgemeinen sehr groß sein (vgl. den nächsten Paragraphen). In der Kanalmitte aber, d. h. im ganzen Kanal außerhalb der unmittelbaren Wandnähe, ist w' von der Größenordnung 1, also sehr klein gegen C bzw. $C_1 y$. Hier wird daher der turbulente Impulstransport den laminaren völlig überwiegen.

Der Bauart der Systeme (38) und (39) entspricht es, daß wir eine triviale Lösung derselben sofort angeben können, nämlich

$$\varphi_1 = 0, \quad w' = C \quad \text{bzw.} \quad w' = C_1 y,$$

d. h. wir kommen so zur Laminarbewegung zurück.

Unser Ziel muß es jetzt sein, über die nichttrivialen Lösungen von (38) und (39) bestimmte Resultate zu erhalten.

§ 2. Die turbulente Bewegung in Wandnähe und das Widerstandsgesetz.

Das wichtigste Ergebnis über das Verhalten von w in unmittelbarer Nähe der Wände ist das von v. Kármán (a. a. O.) durch Dimensionsbetrachtungen aus dem Blasius'schen Widerstandsgesetz abgeleitete Gesetz, daß w in der Nähe einer Wand wie $\eta^{1/2}$ anwächst (wenn η die Entfernung von der Wand darstellt). Wir wiederholen kurz den Kármán'schen Gedankengang, da wir uns dadurch allgemein darüber orien-

1) Wir meinen hier den mittleren Impuls in der X -Richtung, der bei unserem Problem in der Y -Richtung übertragen wird. Der Impuls in der X -Richtung ist im wesentlichen gleich u , die Geschwindigkeit des den Impuls tragenden Teilchens in der Y -Richtung ist v , also der in der Zeiteinheit übertragene Impuls $u \cdot v$, im Mittel $\overline{u \cdot v}$, was im Falle (36) ergibt:

$$\overline{u \cdot v} = -i \alpha (\varphi_1 \varphi_1' - \varphi_1' \varphi_1).$$

tieren können, was wir — auch ohne das Blasius'sche Gesetz zu kennen — für das Verhalten von w in Wandnähe zu erwarten haben.

Die an einer Wand angreifende Schubspannung τ (d. h. also der Widerstand) muß sich, wie aus Dimensionsbetrachtungen leicht zu ersehen ist, darstellen lassen in der Form:

$$\tau = \kappa \cdot \mu \cdot \frac{U}{h} \cdot f(R),$$

wo κ eine bestimmte dimensionslose Konstante bedeutet.

Wenn wir speziell ein Potenzgesetz annehmen, so ist

$$(40) \quad \tau = \kappa \cdot \mu \cdot \frac{U}{h} \cdot R^{\xi} = \kappa \cdot \mu \cdot \frac{U}{h} \cdot \left(\frac{U \cdot h \cdot \varrho}{\mu} \right)^{\xi}.$$

Aus (40) folgt umgekehrt:

$$U = \left[\frac{\tau}{\kappa} \cdot \left(\frac{h}{\mu} \right)^{1-\xi} \cdot \varrho^{-\xi} \right]^{\frac{1}{1+\xi}}.$$

Die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe muß sich dann durch eine Gleichung der Form darstellen:

$$w = \frac{1}{U} \left[\tau \cdot \varrho^{-\xi} \cdot \left(\frac{h}{\mu} \right)^{1-\xi} \right]^{\frac{1}{1+\xi}} f\left(\frac{\eta}{h}\right)$$

(w ist hier wieder [vgl. (1) und (6)] dimensionslos gewählt und enthält daher U im Nenner, η bedeutet den Abstand von der Wand).

Nehmen wir wieder in 1. Näherung ein Potenzgesetz an (σ sei eine dimensionslose Konstante):

$$w = \frac{\sigma}{U} \left[\tau \varrho^{-\xi} \cdot \left(\frac{h}{\mu} \right)^{1-\xi} \right]^{\frac{1}{1+\xi}} \left(\frac{\eta}{h} \right)^{\varepsilon}.$$

Fordert man jetzt, daß die Geschwindigkeitsverteilung in unmittelbarer Nähe der Wand nur von τ , μ , ϱ , nicht aber von h abhängen soll, was physikalisch sehr plausibel ist, so folgt:

$$(41) \quad \frac{1-\xi}{1+\xi} = \varepsilon.$$

Für $\xi = \frac{3}{4}$, wie es dem Blasius'schen Gesetze entspricht, ergibt sich also $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Um uns über die physikalische Bedeutung dieses Resultats klar zu werden, bemerken wir: $w \sim \eta^{1/4}$ bedeutet, daß $w' = dw/d\eta$ am Rande unendlich ist, daß also w sich un-

endlich an die Wand anschmiegt. Nun ist es aber klar, daß in Wirklichkeit w' an der Wand nicht unendlich sein kann, denn w' bedeutet ja gerade im wesentlichen die Schubspannung an der Wand und ist daher nach (40) bis auf einen von R unabhängigen Zahlenfaktor gleich $R^{\frac{1}{2}}$ zu setzen.

$$(42) \quad w'_{\text{Rand}} \sim R^{\frac{1}{2}}.$$

w' an der Wand ist also bei den uns interessierenden großen Werten von R sehr groß. Die Geschwindigkeitsverteilung $w \sim \eta^{\frac{1}{2}}$ wird ihrer Ableitung entsprechend nur im Grenzfalle unendlich großen Wandabstandes oder reibungsloser Flüssigkeit ($R = \infty$) in Strenge gültig sein. Noch einfacher läßt sich dieser Sachverhalt überblicken, wenn wir das gefundene Gesetz $w \sim \eta^{\frac{1}{2}}$ in der Form schreiben $\eta \sim w^2$. Aus der Tatsache endlicher Schubspannung wissen wir, daß das erste Glied der Potenzentwicklung $\eta(w)$ von der Form $\gamma_1 w$ sein muß. Dieses Glied ist aber sehr klein, nämlich im wesentlichen gleich dem reziproken Werte von w' , also von der Ordnung $R^{-\frac{1}{2}}$ (vgl. 42).

Die Meinung des abgeleiteten Gesetzes $w \sim \eta^{\frac{1}{2}}$ ist also offenbar die, daß die Reihenentwicklung von $\eta(w)$ anfangen soll mit den Gliedern

$$(43) \quad \eta = \gamma_1 w + \gamma_2 w^2 + \dots$$

wo γ_1 außerordentlich klein ist, und daß daher das erste Glied $\gamma_1 w$ für einigermaßen große Werte von w gegen das zweite $\gamma_2 w^2$ gestrichen werden kann.

Nach den vorhergehenden Darlegungen erwarten wir unabhängig von der Gültigkeit des $\frac{1}{2}$ -Gesetzes für das Aussehen der Grundströmung der turbulenten Bewegung in der Mitte kleine Krümmungen, in Wandnähe Anschmiegen der Grundströmung an die Wände.

Für ein solches Profil gelten die Untersuchungen des Teiles I nicht unmittelbar, denn wir haben dort w' , w'' usw. als endlich vorausgesetzt. Doch lassen sich diese Untersuchungen leicht auf solche Profile wie das hier vorkommende verallgemeinern (vgl. § 5, S. 597). Insbesondere wird die Lösung der reduzierten Gleichung (8) (also $\lim R = \infty$) mit Befriedigung der Grenzbedingungen hier besonders einfach; das soeben charakterisierte Profil gehört nach § 5, S. 597 zu den „schwingungsfähigen“, es existiert eine Lösung von (28) mit reellem c ; dies ist außerordentlich wichtig, zeigt es doch,

daß die „turbulenten Profile“ immer „labil“ sind nach § 5, oder anders ausgedrückt, daß gerade die Abweichung (42) vom laminaren Widerstandsgesetz die Möglichkeit eines „labilen“ Profils, also der Turbulenz gibt.

Die Lösung von (28) heißt für $\alpha = 0$

$$(44) \quad \varphi = [w - w(+1)] \int_{-1}^y \frac{dy}{[w - w(+1)]^2}.$$

Daß φ für $y = -1$ Null wird, haben wir durch Wahl der unteren Grenze des Integrals erreicht; daß es aber auch für $y = +1$ Null wird, wegen der Wahl $c = w(+1)$ ist leicht zu sehen aus folgender Umformung:

$$\varphi = [w - w(+1)] \int_{w(-1)}^w \frac{dw}{[w - w(+1)]^2 \cdot w'}.$$

Das Integral der rechten Seite wird nämlich im Punkte $w = w(+1)$ von niedrigerer Ordnung unendlich als $\frac{1}{w - w(+1)}$, da w' dort (im Limes $R = \infty$) unendlich wird. Also ist $\varphi_1 = 0$ für $y = +1$. Durch (44) haben wir im Limes reibungsloser Flüssigkeit die Amplitude der turbulenten Schwingungen dargestellt und aus den Grenzbedingungen den Wert für β/α , nämlich $\beta/\alpha = w(+1)$ abgeleitet. Es ist aber selbstverständlich, daß auch die zu (44) symmetrische Lösung

$$(44a) \quad \varphi = [w - w(-1)] \int_{+1}^y \frac{dy}{[w - w(-1)]^2}$$

den Grenzbedingungen genügt; also gilt hier $c = w(-1)$. Bei der Couetteschen Anordnung schließen wir daher aus (44) und (44a), daß zwei zueinander symmetrische Schwingungssysteme existieren, deren Wellengeschwindigkeit bzw. mit den Geschwindigkeiten der beiden Wände ($w(+1)$ und $w(-1)$) übereinstimmen.

Für die symmetrische Strömung zwischen zwei ruhenden Wänden dagegen ist $w(+1) = w(-1) = 0$. Aus (44) und (44a) schließen wir dann, daß jedes Integral der Form

$$\varphi = w \int \frac{dy}{w^2}$$

den Grenzbedingungen genügt. Aus der Forderung (a), daß

φ ungerade sein soll, ergibt sich aber, daß wir als untere Grenze des Integrals $\int \frac{dy}{w^2}$ $y = 0$ wählen müssen; also

$$(44b) \quad \varphi = w \int_0^y \frac{dy}{w^2}.$$

Im Falle symmetrischer Strömung gilt also insbesondere für β/α :

$$(44c) \quad w(+1) = w(-1) = \frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Von der turbulenten Grundströmung interessiert uns zunächst am meisten die Art der Singularität derselben an den Wänden, also wenn wir annehmen $w \sim \eta^\varepsilon$, der Exponent ε . Wir wollen zu zeigen versuchen, daß aus den Differentialgleichungen (38) bzw. (39) im Limes $R = \infty$ wenigstens in unmittelbarer Wandnähe tatsächlich ein solches Potenzgesetz mit dem Exponenten $\varepsilon = \frac{1}{2}$ folgt. Dabei ist allerdings der Konvergenzbereich der benutzten Potenzreihen nicht sicher gestellt, so daß die Schlüsse, soweit sie auf die Gestalt des Profils in einigem Abstand von der Wand angewendet werden, unsicher sind. Wir entwickeln φ_1 und w in der Umgebung von $\eta = 0$ nach ganzen und positiven Potenzen von η — dies ist möglich für jedes endliche — und dann umgekehrt η nach ganzen Potenzen von w . So werden wir direkt zu der Formel (43) für $\eta(w)$ geführt.

Wir behaupten — und dies ist das wichtigste Resultat, das wir später brauchen — φ_1 läßt sich in 1. Näherung darstellen durch eine Reihe der Form

$$\varphi_1 = \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 \eta^3 + \alpha_4 \eta^4 + \dots,$$

wo $\alpha_2, \alpha_3 \dots$ reelle, $\alpha_5, \alpha_{11} \dots$ rein imaginäre Konstanten sind; ferner ist w von der Form:

$$(45) \quad w = \beta_1 \eta + \beta_2 \eta^2 + \dots$$

Diese Behauptung läßt sich für die Differentialgleichungen (38) direkt durch Ansatz von φ und w mit unbestimmten Koeffizienten beweisen, wenn die Glieder $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und β_0, β_1 gegeben sind. Suchen wir also vorerst diese Glieder zu bestimmen. Zunächst muß φ_1 und φ_1' für $\eta = 0$ wegen der Grenzbedingungen Null sein, also fängt die Reihe für φ_1 mit $\alpha_2 \eta^2$ an ($\alpha_0 = \alpha_1 = 0$). Daß ferner das folgende Glied $\alpha_3 \eta^3$

wegfällt, d. h. sehr klein wird gegen die übrigen Glieder, können wir nachträglich verifizieren. Einschaltungsweise wollen wir hier zu diesem Zwecke durch einmalige näherungsweise Integration der zweiten Gleichung (38) beweisen, daß α_3 von der Größenordnung αR wird. Für $\alpha^2 = 0$ lautet Gleichung (38)

$$\varphi_1'' \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - \varphi_1 w'' = \frac{i}{\alpha R} \varphi_1'''' ,$$

woraus folgt:

$$(46) \quad \varphi_1' \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - \varphi_1 w' = \frac{i}{\alpha R} \varphi_1''' + A .$$

Die Konstante A ist hierin von derselben Größenordnung, wie die linke Seite von (46) in der Mitte des Kanals, also höchstens von der Größenordnung 1 (vgl. I, § 2). φ_1''' am Rande ist daher wegen der Grenzbedingungen von der Ordnung αR . Dasselbe gilt für α_3 .

Nehmen wir also einstweilen α_3 als klein an und suchen dies später zu rechtfertigen. Von den Konstanten β_0, β_1 ist die erste β_0 wegen Forderung (a) § 1 gleich Null.

Die Konstanten α_2 und β_1 sind zunächst willkürlich¹⁾ und wir haben auch keine Möglichkeit, sie aus der Lösung der Differentialgleichungen (38) und (39) in Wandnähe abzuleiten. Diese Möglichkeit bestände erst, wenn es uns gelänge, die Lösung (45) analytisch bis zur anderen Wand fortzusetzen. Diese Aufgabe jedoch ist mathematisch außerordentlich kompliziert, schon deswegen, weil, wie sich zeigen wird, die vereinfachten Gleichungen (38), (39) nicht ausreichen, um φ_1 und w in der Mitte des Kanals zu bestimmen. Obwohl wir demnach auf die Lösung dieser Aufgabe verzichten müssen, können wir doch erwarten, daß wir durch die bloße Entwicklung von φ_1 und w in der Nähe einer Wand mit unbestimmten Koeffizienten α_2, β_1 doch diejenigen qualitativen Eigenschaften von w und φ_1 in Wandnähe erhalten können, die erfahrungsgemäß ganz unabhängig sind von dem Verhalten der Flüssigkeit in der Kanalmitte wie z. B. das Gesetz $w \sim \eta^{1/2}$.

1) Wir wollen α_2 als reell annehmen; dies bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn φ_1 ist nur bis auf einen Faktor der Form e^{iz} bestimmt, da man in (36) den Anfangspunkt der Zeit beliebig wählen kann.

Gehen wir mit dem Ansatz:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \alpha_2 \eta^2 + \alpha_4 \eta^4 + \alpha_6 \eta^6 + \dots \\ w &= \beta_1 \eta + \beta_2 \eta^2 + \beta_3 \eta^3 + \dots\end{aligned}$$

in Gleichung (38) ein, wobei wir die zweite Gleichung durch (46) ersetzen. Wir nehmen also wieder α als sehr klein an, was hier nur bedeutet (vgl. I, § 2), daß die Wellenlänge der Schwingungen groß sein soll gegenüber der Grenzschichtdicke. Außerdem setzen wir nach (44c)

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Für die erste Gleichung (38) schreiben wir ferner

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} -i\alpha R(\varphi_1' \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1' \varphi_1) &= 2\alpha R(\varphi_{1i}' \varphi_{1r} - \varphi_{1i} \varphi_{1r}') \\ &= w' - C_1 y. \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeutet φ_{1r} den reellen, φ_{1i} den imaginären Teil von φ_1 .

Aus (46) und (47) folgen jetzt die Rekursionsformeln

$$(48) \quad n(n-1)(n-2)\alpha_n = -i\alpha R \sum_{s=2}^{n-2} (n-2s)\alpha_{n-1-s}\beta_{s-1},$$

$$(49) \quad n\beta_n = 2\alpha R \sum_{s=2}^{n-2} (n-2s)\alpha_{n-s}^i \beta_s^r;$$

$$\begin{aligned}\text{dazu} \quad \beta_1 &= C_1 y_{\text{Rand}}, \\ 2\beta_2 &= C_1.\end{aligned}$$

Hierin bedeutet α_s^r , α_s^i den reellen bzw. imaginären Teil von α_s .

Aus (48) folgt zunächst

$$\alpha_4 = 0.$$

Aus (49) ergibt sich dann:

$$\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0.$$

Auch β_2 können wir näherungsweise Null setzen.

Aus (49) folgt nämlich

$$\beta_2 = \frac{\beta_1}{2y_{\text{Rand}}};$$

das Glied $\beta_2 \eta^2$ ist also für sehr kleine η gegen das erste Glied $\beta_1 \eta$ zu vernachlässigen; für größere η aber überwiegen die höheren Glieder $\beta_7 \eta^7$ usw. völlig.

Nehmen wir also auch $\beta_2 = 0$ an und rechnen so die höheren Glieder der Reihen für β_1 und w aus.

Es folgt

$$\alpha_5 = -i\alpha R \frac{\alpha_2 \beta_1}{3 \cdot 4 \cdot 5}; \quad \alpha_6 = \alpha_7 = 0; \quad \alpha_8 = -(\alpha R)^2 \frac{\alpha_2 \beta_1^2}{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8};$$

$$\alpha_9 = \alpha_{10} = 0;$$

$$\alpha_{11} = -(\alpha R)^3 \left(\frac{\alpha_2^2 \beta_1}{2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} - \frac{\alpha_2 \beta_1^2}{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} \right);$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0.$$

$$\beta_7 = -(\alpha R)^2 \frac{\alpha_2^2 \beta_1}{70}; \quad \beta_8 = \beta_9 = \beta_{10} = \beta_{11} = \beta_{12} = 0;$$

$$\beta_{13} = (\alpha R)^4 \left(\frac{\alpha_2^2 \beta_1^2}{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14} - \frac{\alpha_2^4 \beta_1}{7 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13} \right).$$

Die von uns behauptete Darstellung (45) für w ist also bewiesen und es läßt sich leicht zeigen, daß auch von den weiteren Gliedern β nur jedes sechste Glied einen endlichen Wert hat.

Für die Darstellung von η als Potenzreihe nach w folgt hieraus:

$$\eta = \gamma_1 w + \gamma_7 w^7 + \gamma_{13} w^{13} + \dots$$

$$(50) \quad \gamma_1 = \frac{1}{\beta_1}, \quad \gamma_7 = (\alpha R)^2 \frac{\alpha_2^2}{70 \beta_1^7},$$

$$\gamma_{13} = (\alpha R)^4 \left(\frac{\alpha_2^4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17}{7 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \beta_1^{13}} - \frac{\alpha_2^2}{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14 \beta_1^{13}} \right).$$

Die Glieder γ_2 bis γ_6 , γ_8 bis γ_{12} , γ_{14} usw. sind alle gleich Null.¹⁾

Die Entwicklung (50) stimmt nun in der Tat völlig mit (49) überein und auch ohne Kenntnis der Konstanten α_2 und β_1 scheinen wir so zu dem von Kármán halbempirisch abgeleiteten Gesetz $\eta \sim w^7$ zu gelangen. Die Koeffizienten γ_1 und γ_7 lassen sich jedoch nicht berechnen. Umgekehrt können wir vielleicht aus dem empirischen Befund für die Koeffizienten β_1 und α_2 schließen, daß γ_7 von der Größenordnung 1, γ_1 von der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$, also $\alpha_2 \sim (\alpha R)^{1/2}$ ist. Nachträglich bestätigen wir so auch unsere frühere Behauptung $\alpha_2 \eta < \alpha_2$. Fragt man sich nach der Größenordnung der Werte von w , für die das

1) Diese Potenzreihe $\eta(w)$ läßt sich natürlich auch direkt aus (46) und (47) ableiten, ohne den Umweg über die Reihe von $w(\eta)$, wenn w als unabhängige Variable eingeführt wird. Doch sind die dazu nötigen Rechnungen etwas komplizierter.

3. Glied in (50) klein ist gegen das zweite, für die also das w^7 -Profil wirklich gilt, so ergibt sich $w \sim \beta_1^{-1/6}$, also $\sim R^{-1/6}$. Aus den Differentialgleichungen (38) folgt nach alledem das Profil $w \sim \eta^{1/6}$ zunächst nur qualitativ; darüber, daß das $\frac{1}{6}$ -Profil fast bis zur Kanalmitte hin beobachtet ist, geben unsere Rechnungen keinen Aufschluß. Das war jedoch auch nicht zu erwarten, denn die übrigen Konstanten, die in das Gesetz eingehen, hängen auch von dem Verhalten der Flüssigkeit an der gegenüberliegenden Wand ab.

Fassen wir einschaltungsweise noch einmal kurz zusammen, welche Vernachlässigungen wir bei der Ableitung von (50) aus (48) und (49) begangen haben und suchen dadurch zu bestimmen, mit welcher Genauigkeit die aus (50) gezogenen Schlüsse richtig sind. Zunächst haben wir das System (38) statt (37) benutzt, also Größen der Ordnung φ_2/w gestrichen. Ferner haben wir $\alpha_3 = 0$, $\beta/\alpha = 0$, $\beta_2 = 0$ gesetzt und damit Größen der Ordnung

$$\frac{\alpha_1 \eta}{\alpha_2}, \quad \frac{\beta}{\alpha w}, \quad \frac{\beta_1 \eta}{\beta_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\beta_1}{\beta_1 \eta^6}$$

vernachlässigt. Die Genauigkeit unserer Rechnungen wird durch das größte der hier vernachlässigten Glieder bestimmt sein. Einfache Größenordnungsbetrachtungen, die wir hier nicht durchführen, machen es wahrscheinlich, daß von diesen Gliedern φ_2/w das größte ist, daß aber auch dieses Glied mit $R \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Durch Wahl eines hinreichend großen Wertes für R wird man also die Genauigkeit der aus (48), (49) und (50) abgeleiteten Resultate beliebig weit treiben können.

Was das Blasius'sche Widerstandsgesetz betrifft, so läßt sich dieses natürlich umgekehrt nach dem oben geschilderten Verfahren mittels Dimensionsbetrachtungen aus dem Gesetz $\eta \sim w^7$ herleiten, wenn man, wie geschehen, annimmt, daß das Verhalten von w in Wandnähe von der Kanalbreite unabhängig ist. Die Frage aber, ob auch diese letztere physikalisch sehr plausible Annahme aus den Differentialgleichungen (38) bzw. (39) folgt, müssen wir aus den oben angegebenen Gründen (Unmöglichkeit der analytischen Fortsetzung) unbeantwortet lassen.

Eine bemerkenswerte direkte Folgerung über das Widerstandsgesetz können wir jedoch aus (38) und (39) durch Größenordnungsbetrachtungen ziehen. Im Kanal, die unmittelbare

Wandnähe und den Punkt $y=0$ [vgl. u. (66)] ausgeschlossen, kann man nämlich statt der ersten Gleichung (38) wegen der Größe von C_1 schreiben (vgl. S. 612)

$$(51) \quad i \propto R (\varphi_1' \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1' \varphi_1) = C_1 y.$$

Da nun die Amplitude φ_1 nicht mit $R \rightarrow \infty$ gegen unendlich gehen kann — dies würde allen unseren Rechnungen den physikalischen Sinn nehmen —, so folgt, daß C_1 höchstens groß von der Ordnung αR ist, daß also der Exponent ξ von Gleichung (40) < 1 sein muß (was ja auch in gewisser Weise aus (41) hervorgeht). Daraus folgt [vgl. Gleichung (42) und (40)], daß das in der Hydraulik gewöhnlich angenommene Widerstandsgesetz $\tau = \text{const} \cdot U^2$ eine obere Grenze für alle denkbaren Widerstandsgesetze der Turbulenz darstellt, die unabhängig ist von der Wandbeschaffenheit. Man kann vermutungsweise schließen, daß das Gesetz $\tau \sim U^{1/4}$ nur gültig ist für glatte Wände — nur für diese haben wir ja auch $\eta \sim w^7$ erhalten —, daß sich aber das Widerstandsgesetz für rauhe Wände immer mehr dem quadratischen annähert.¹⁾ Denn für rauhe Wände wird die Amplitude φ_1 von R unabhängig und von der Größe der Wandstörungen sein — außerdem werden für rauhe Wände die Grenzbedingungen nicht mehr verursachen, daß φ_1 in erster Näherung reell ist, wie es der Gleichung (44) entspricht.

An den Schlüssen dieses Paragraphen ändert sich nichts, wenn man an Stelle der Differentialgleichungen (38) die Gleichungen (39) zugrunde legt.

§ 3. Die turbulente Bewegung außerhalb der unmittelbaren Wandnähe.

Für die Bewegung in der Kanalmitte ist es wesentlich, daß sich φ_1 hier aus denjenigen beiden Integralen von (7a) zusammensetzt, die schon bei der reibungslosen Flüssigkeit, also für Gleichung (8) auftreten (vgl. I, § 2). Die wichtigste hieraus folgende Eigenschaft von φ_1 ist die, daß es, bis auf Größen der Ordnung φ_2 und $(\alpha R)^{-1}$ der Bedingung

$$(52) \quad \varphi_1' \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1' \varphi_1 = \text{const.}$$

genügt.

1) Vgl. die genaueren Untersuchungen von v. Kármán a. a. O. und die experimentellen Untersuchungen von Schiller, dieselbe Zeitschrift 3. S. 2, 1923.

Dies ergibt sich vermöge des Abelschen Satzes aus der Tatsache, daß, bis auf Größen der Ordnung φ_2 und $(\alpha R)^{-1} \varphi_{11}$ und φ_{11} (der reelle bzw. imaginäre Teil von φ_1) Lösungen der Differentialgleichung (8) sind.

Daraus ist zu schließen, daß die Gleichungen (38) bzw. (39) nicht ausreichen, um die Bewegung in der ganzen Kanalbreite festzulegen, daß wir vielmehr zu Gleichung (37) und zu dem ihr im Couetteschen Fall entsprechenden Gleichungssystem zurückgreifen müssen.

Dies bringt im allgemeinen eine Komplizierung der mathematischen Aufgabe mit sich. Nur im Couetteschen Fall läßt sich die Aufgabe verhältnismäßig leicht lösen, weil die erste Gleichung (39) bis auf Größen der Ordnung w'/C also $(\alpha R)^{-1/2}$ und φ_2^2 , vgl. (37), mit Gleichung (52) übereinstimmt. Während also Gleichung (52) ihrer Ableitung aus dem Abelschen Satz gemäß nur bis auf Größen der Ordnung φ_2 richtig ist, soll hier im Couetteschen Fall noch (39) bis auf Größen der Ordnung φ_2^2 gelten. Dieser Forderung wird Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$(53) \quad \varphi_2 = 0.$$

Diese Gleichung ist also als Lösung unserer zugrunde gelegten Differentialgleichung für den Couetteschen Fall anzusehen.

Aus (53) würde für φ_1 aus (37) folgen

$$(54) \quad \varphi_1''' \varphi_1 - \varphi_1'' \varphi_1' = 0.$$

Nun gilt für den Couetteschen Fall nicht das System (37), sondern ein komplizierteres, das wir hier nicht anschreiben wollen. Wir geben aber von ihm an, daß es ebenso wie (37) für $\varphi_2 = 0$ zur Lösung (54) führt und daher zum Ergebnis:

$$(55) \quad \varphi_1 = a e^{\gamma y} + b e^{-\gamma y}$$

Hier sind a , b , γ irgendwelche komplexe Konstanten. Für w folgt dann aus der 2. Gleichung (39) bzw. aus ihrer reduzierten Form (8):

$$(56) \quad w - c = a_1 e^{\gamma_1 y} + b_1 e^{\gamma_1 y}.$$

Da nun $w - c = 0$ sein soll an der einen Wand, da andererseits w ungerade sein soll um $y = 0$, so folgt, daß w einfach durch Nullwerden von γ_1 und geeignetes Wachsen von a_1 und b_1 zum linearen Profil ausarten muß.

Wir erhalten also das wichtige Resultat, daß beim Couette-schen Fall das Grundprofil w der turbulenten Bewegung in der ganzen Kanalbreite wesentlich linear verläuft (— jedoch stark abweichend vom laminaren Profil; es wird viel flacher sein, als das laminare —) [daß es sich aber (vgl. II. § 2) am Rand wieder wie $\eta^{1/2}$ an die Wände anschmiegt].

Gehen wir nun zum komplizierteren Fall einer Strömung zwischen zwei ruhenden Wänden, also genau zum System (37) über. Zur Lösung müssen wir uns naturgemäß mit rohen Näherungen begnügen. Zunächst können wir in (37) die rechten Seiten aller drei Gleichungen, nämlich die Reibungsglieder, streichen — dies wird durch die Überlegungen von I, § 2 vollauf gerechtfertigt. Dann setzen wir [vgl. Gleichung (44c)] $\beta/\alpha = 0$.

Für φ_1 erhalten wir so an Stelle der zweiten Gleichung (37)

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1'' w - w'' \varphi_1 - \alpha^2 w \varphi_1 - \varphi_2' (\bar{\varphi}_1'' - \alpha^2 \bar{\varphi}_1) - 2 \varphi_2 (\bar{\varphi}_1''' \\ - \alpha^2 \bar{\varphi}_1') + 2 \bar{\varphi}_1' (\varphi_2'' - 4 \alpha^2 \varphi_2) + \bar{\varphi}_1 (\varphi_2''' - 4 \alpha^2 \varphi_2') = 0. \end{aligned} \right.$$

Entwickeln wir φ_1 als Lösung der Gleichung (57) noch Potenzen von α^2 einerseits, von φ_2 andererseits, bemerken ferner, daß φ_1 ungerade sein soll (vgl. 44b) und schreiben $\varphi_1 = \varphi_{10} + \varphi_{11}$, so ergibt sich bei Berücksichtigung nur der linearen Glieder:

$$(58) \quad \varphi_{10} = a w \int_0^y \frac{dy}{w^3}.$$

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{11} = a w \int_0^y \frac{dy}{w^3} \int_0^y dy (\alpha^2 w \varphi_{10} + \varphi_2' \varphi_{10}'' + 2 \varphi_2 \varphi_{10}''' \\ - 2 \varphi_{10}' \varphi_2'' - \varphi_{10} \varphi_2'''). \end{aligned} \right.$$

Hierin ist φ_1 natürlich nur bis auf einen konstanten Faktor a bestimmt, den wir hier, was keine Beschränkung bedeutet, reell angenommen haben.

Gehen wir mit diesem Werte von φ_1 in die vereinfachte 1. Gleichung (37), nämlich:

$$(60) \quad \varphi_1 \bar{\varphi}_1'' - \bar{\varphi}_1 \varphi_1'' = \text{const.}$$

ein, so ergibt sich, wenn φ_{2i} den imaginären Teil von φ_2 bezeichnet:

$$(61) \quad (\varphi_{2i}' \varphi_{10}'' + 2 \varphi_{2i} \varphi_{10}''' - 2 \varphi_{10}' \varphi_{2i}'' - \varphi_{10} \varphi_{2i}''') \int_0^y \frac{dy}{w^3} = \text{const.}$$

Jetzt genügt aber φ_{2i} , wie aus der dritten Gleichung (37) und daraus, daß φ_1 in erster Näherung reell ist, folgt, der Gleichung

$$(62) \quad \varphi_{2i}'' w - \varphi_{2i} w'' = 0.$$

also

$$(63) \quad \varphi_{2i} = b w \int_0^y \frac{dy}{w^2} = c \varphi_{10}.$$

Gehen wir mit diesem Werte von φ_{2i} in (63) ein, bedenken wir ferner, daß für $y = 0$ die linke Seite von (61) und damit die Konstante der rechten Seite Null ist (dies bedeutet für die Konstante der rechten Seite von (60) nur, daß sie in erster Näherung Null, d. h. klein von der Ordnung $\varphi_1 \varphi_2^2$ bzw. $\alpha^2 \varphi_1 \varphi_2$ oder $\alpha^4 \varphi_1$ ist), so erhalten wir

$$(64) \quad \varphi_{10} \varphi_{10}''' - \varphi_{10}'' \varphi_{10}' = 0,$$

was vollständig mit (54) übereinstimmt.

Diese Gleichung wird nun allerdings, ebenso wie (54), in der Umgebung des Punktes $y = 0$ trivial, sie ist, weil φ eine ungerade Funktion von y ist, dort identisch erfüllt. Sie kann also dort auch keine Bestimmung von w liefern. Dies führt beim symmetrischen Profil (64) zu einer merkwürdigen Unstetigkeit im Punkte $y = 0$. (Beim ungeraden Profil ist eine solche Unstetigkeit aus den Differentialgleichungen nicht zu erkennen). Integriert man nämlich (37a), so erhält man, wie oben gezeigt, nach einmaliger Integration die Gleichung:

$$(65) \quad 2\alpha R [\bar{\varphi}''_1 \varphi_1 - \varphi_1'' \bar{\varphi}_1 + 2(\bar{\varphi}_2'' \varphi_2 - \varphi_2'' \bar{\varphi}_2) + \dots] = w'' - C$$

[wo C (vgl. S. 612) bei Gültigkeit des Blasius'schen Gesetzes von der Größenordnung $(\alpha R)^{3/4}$, also jedenfalls sehr groß ist]. Die linke Seite von (65) verschwindet aber mit φ_1 und φ_2 (die ja ungerade Funktionen von y sind) an der Stelle $y = 0$. Dort muß also gelten

$$(66) \quad w_{y=0}'' = C.$$

Dies bedeutet, daß $w_{y=0}''$ sehr groß ist ($\sim (\alpha R)^{3/4}$), daß also w an der Stelle $y = 0$ einen scharfen Knick¹⁾ (Krümmungsradius

1) Auf diesen Knick hat mich freundlicherweise Hr. Prof. Prandtl auf Grund des empirischen Materials hingewiesen. Der Knick scheint dabei empirisch nicht so scharf zu sein, wie ihn die Rechnung ergibt, was sich wohl zwanglos dadurch erklärt, daß eben die Annahme (a) S. 600 über die Symmetrie auch der Wirbel und Störungen nicht genau der Wirklichkeit entspricht.

$\sim (\alpha R)^{-1/4}$ aufweist. In geringer Entfernung von diesem Punkt muß w nach (64) wieder wesentlich linear verlaufen.

Wir erhalten das Resultat:

Auch bei der Strömung zwischen zwei ruhenden Wänden — was sich wohl auch auf die Strömung im Rohr übertragen läßt — verläuft das Profil näherungsweise über die ganze Kanalbreite linear, in der Mitte jedoch besitzt es einen scharfen Knick (an die Wände schmiegt es sich mit dem $y^{1/2}$ -Gesetz an). (Vgl. Fig. 3.)

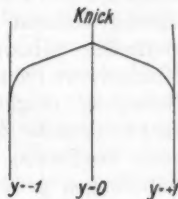


Fig. 3.

Die physikalische Ursache des scharfen Knicks ist die, daß der Gradient der turbulenten Impulsübertragung für $y = 0$ aus Symmetriegründen verschwindet, daß also, weil der Gradient der gesamten Impulsübertragung über die Kanalbreite konstant ist, der Gradient der laminaren Impulsübertragung, d. h. w'' dort sehr groß sein muß.

§ 4. Schlußbemerkungen und Zusammenfassung der physikalischen Ergebnisse.

Unsere Untersuchungen haben noch zwei wesentliche Lücken: Erstens liefern sie nicht den Übergang von dem $\eta^{1/2}$ -Profil in das im mittleren Teil gültige lineare Profil und zweitens beschränken sie sich auf große Werte von R , liefern also auch nicht den Minimalwert von R , falls ein solcher existiert, für den die turbulente Bewegung noch möglich ist. Die erste dieser beiden Lücken ist am schwersten auszufüllen (vgl. S. 617) und wir können auch kein Verfahren angeben, das in befriedigender Weise die hier gestellte Aufgabe lösen würde. Man kann versuchen, die beiden von der Wand und der Kanalmitte herkommenden Näherungen aneinander zu stückeln, was durch die Bedingung geschehen müßte, daß an der betreffenden Ansatzstelle $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \varphi_1'''$, w und w' stetig sein sollen; die Konvergenz der Entwicklungen (45) und (50) reicht aber kaum aus, um so eine einigermaßen definierte Näherung zu garantieren. Jedenfalls hängt das Endergebnis, das Profil w , noch stark von der Art der Zusammensetzung der beiden Näherungen ab. Es muß schließlich auch als fraglich betrachtet werden, ob eine solche exakte Durch-

führung der Ansätze (S. 609) wesentlich neue physikalische Resultate in Übereinstimmung mit der Erfahrung liefern würde, da diese Ansätze zweifellos eine sehr starke Idealisierung der Wirklichkeit bedeuten.

Die Ausfüllung der zweiten Lücke dagegen bietet prinzipiell gar keine Schwierigkeiten, alle Hilfsmittel dazu sind schon im Teil I enthalten, und wenn einmal das Profil w vollständig bekannt ist, so reichen die im Teil I geschilderten Methoden prinzipiell aus, um nach Art von I, § 6 den Minimalwert von R zu berechnen, für den die turbulente Bewegung möglich ist. Man könnte z. B. die kritische Reynoldssche Zahl für ein Profil berechnen, das nach dem oben erwähnten Verfahren durch Anstückelung der beiden Näherungen gewonnen ist oder man könnte für diese Untersuchung das empirisch beobachtete Profil zugrunde legen und so die Reynoldssche Zahl auf halbempirischem Wege ausrechnen. In jedem Falle wird man wohl — das haben die Untersuchungen im Teil I wahrscheinlich gemacht und direkte, hier nicht angegebene Rechnungen bestätigt — zur selben Größenordnung der kritischen Reynoldsschen Zahl, nämlich $R \sim 10^3$ kommen; der genaue Wert von R wird allerdings noch zu sehr von der Art abhängen, wie das Profil gewonnen wurde, als daß wir Vergleiche mit der Erfahrung ziehen könnten. Deshalb haben wir hier noch keine derartige Berechnung von R durchgeführt.

Fassen wir zum Schluß zusammen, was als physikalisches Ergebnis aus unseren Untersuchungen über das Turbulenzproblem zu schließen ist: Im Teil I haben wir erkannt, daß die laminare Bewegung und ihre Stabilitätsverhältnisse keine wesentliche Bedeutung für das Turbulenzproblem und die kritische Reynoldssche Zahl besitzen. Im Teil II aber haben wir die turbulente Bewegung selbst untersucht und können daraus einige Angaben über den turbulenten Bewegungszustand machen: Allgemein besitzt die Geschwindigkeitsverteilung über den ganzen Kanal einfachsten Charakter, sie ist — je nach den Versuchsbedingungen — linear oder konstant (§ 3), in der Mitte besitzt sie bei der (symmetrischen) Strömung zwischen zwei ruhenden Wänden einen scharfen Knick; an den Wänden schmiegt sie sich im $\eta^{1/4}$ -Profil den Wänden an (§ 2). Darüber, daß das $1/4$ -Profil

bis weit in das Kanalinnere hinein Gültigkeit besitzt, geben die Rechnungen keinen Aufschluß. Die turbulenten Schwingungen verlaufen beim Couetteschen Fall im Innern des Kanals nahezu harmonisch (§ 3, Gl. (53)), in der Nähe der Wände treten alle Oberschwingungen auf. Die Geschwindigkeit der Wellen stimmt mit der Wandgeschwindigkeit überein (§ 2 Gl. 44—44c), beim Couetteschen Fall gibt es zwei Gruppen von turbulenten Schwingungen, deren eine hinsichtlich ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der einen Wand übereinstimmt, während die andere die Geschwindigkeit der anderen Wand besitzt. Die turbulenten Störungen tragen also äußerlich den Charakter einer Wandstörung. Dabei ist aber hervorzuheben, daß diese Störungen unabhängig von Wandrauigkeit und ähnlichen Einflüssen als freie Schwingungen existenzfähig sind. Die Amplitude der turbulenten Wellen nimmt gegen die Wände (folgt aus (44) § 2) stark zu, um erst in unmittelbarster Wandnähe zu Null zu gehen.

Die Wellenlänge der auftretenden Schwingungen (I, § 8) ist der Größenordnung nach gleich, eher etwas größer als die Kanalbreite. Der Minimalwert der Reynoldsschen Zahl (I, § 8), für welchen noch die Turbulenz möglich ist, liegt größenordnungsmaßig bei 10^3 . Als Widerstandsgesetz (§ 2, Gl. (50)) scheint sich für glatte Wände aus dem Profil $\eta^{1/2}$ unter gewissen Voraussetzungen das Blasius'sche $\tau \sim u^{1/2}$ zu ergeben. Für raue Wände nähert es sich wahrscheinlich (§ 2) dem hydraulischen Gesetz $\tau \sim u^2$ an. — Das Ziel der vorliegenden Arbeit bildete weniger die Aufstellung dieser zum großen Teil schon bekannten Gesetzmäßigkeiten, als vielmehr der Nachweis, daß sich alle bisherigen, teilweise scheinbar sich widersprechenden Ergebnisse durch einfache Grundannahmen einheitlich mathematisch beschreiben lassen.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Sommerfeld, möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für vielfache Förderung den herzlichsten Dank aussprechen.

München, Institut für theoret. Physik.

(Eingegangen 20. Februar 1924.)

2. Über die Ungültigkeit des Gleichverteilungssatzes bei Oszillatoren und Rotatoren; von George Jaffé.

Die Gültigkeit des Gleichverteilungssatzes ist im wesentlichen an die Vorzugsstellung geknüpft, die dem Energieintegral gegenüber anderen Integralen der betrachteten Systeme eingeräumt wird. Eine solche Bevorzugung konnte berechtigt erscheinen, solange man sich ausgesprochenermaßen auf die Ergodenhypothese berief, wie Maxwell und Boltzmann das in ihren grundlegenden Arbeiten stets getan haben; seitdem die Ergodenhypothese aber als ungeeignete Grundlage für statistisch-mechanische Untersuchungen erkannt ist, kann auch der Gleichverteilungssatz nicht in derjenigen Allgemeinheit als gültig angesehen werden, die häufig für ihn in Anspruch genommen wird. Diese Verhältnisse kommen in den kritischen Darstellungen von Ehrenfest¹⁾ und Hertz²⁾ vollständig klar zum Ausdruck, es fehlt aber noch an konkreten Beispielen, bei denen sich auf Grund der Prinzipien und Methoden der klassischen statistischen Mechanik der Gleichverteilungssatz als ungültig erweist. Im folgenden sollen zwei solche Beispiele gegeben werden; bemerkenswerterweise handelt es sich dabei um oft behandelte und einfache dynamische Modelle, bei denen die allgemeine Gültigkeit des Gleichverteilungssatzes stets ausdrücklich angenommen worden ist.

§ 1. Oszillatoren im Grenzfall eines großen ν und tiefer Temperatur.

Wir betrachten zuerst den Fall von Oszillatoren und denken uns dafür eine sehr ausgedehnte starre Hülle von zwei Sorten von Atomen erfüllt. Die Atome erster

1) P. u. T. Ehrenfest, Math. Enc. IV. 32.

2) P. Hertz in R. H. Weber und R. Gans, Repertorium der Physik. I. Bd. 2. Teil. 8. Buch. S. 436ff. Leipzig und Berlin 1916. Man vgl. auch S. H. Burbury, Phil. Mag. (5) 50. S. 584. 1900 und G. H. Jeans, Phil. Mag. (6) 4. S. 585. 1902.

Art sollen die Masse m_1 haben und durch elastische Kräfte von der Intensität a an feste Ruhelagen gebunden sein; x_1, y_1, z_1 seien die Komponenten der Entfernung eines solchen Atoms aus seiner Ruhelage. Die Atome zweiter Art sollen die Masse m_2 haben und frei beweglich sein. Die Anzahl der Teilchen beider Art soll sehr groß sein. Ob die Ruhelagen der Atome m_1 regelmäßig in Form eines Gitters angeordnet oder nach den Gesetzen des Zufalls über den ganzen zur Verfügung stehenden Raum verteilt gedacht werden, ist für das Folgende ohne Bedeutung, jedoch soll der mittlere Abstand zweier Atome — gleicher oder verschiedener Art — groß gegen die in Frage kommenden Wirkungssphären sein.

Unter diesen Umständen gelten nach Boltzmannschen Sätzen die folgenden Verteilungsfunktionen¹⁾:

$$(1) f_1(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1) = A_1 e^{-a \left[\frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{a}{2} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \right]}$$

$$(2) f_2(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2) = A_2 e^{-\alpha \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)}, \quad (\alpha, A_1, A_2 \text{ konstant}),$$

aus denen die Gleichheit der mittleren kinetischen und potentiellen Energie pro Freiheitsgrad hervorgeht. Sieht man das gekennzeichnete System als angenähertes Modell eines starren Körpers an, so ergibt sich aus der Verteilungsfunktion (1) zugleich die Gültigkeit des Gesetzes von Dulong und Petit.

Die angeführten Betrachtungen gelten scheinbar ohne Einschränkungen hinsichtlich der Größe der elastischen Kraft a , und so gilt es allgemein als „Folgerung aus der klassischen statistischen Mechanik“, daß ein oszillatorischer Freiheitsgrad beim Übergang zu immer größeren Werten von a den gleichen mittleren Energieinhalt aufweisen würde. Erst im Grenzfalle absoluter Starrheit müßte der Energieinhalt *unstetig* auf Null heruntergehen.

Abgesehen davon, daß die Erfahrung einer solchen Auffassung widerspricht, muß sie auch logisch als wenig befriedigend angesehen werden. Helmholtz hat mit allem Nachdruck darauf hingewiesen, daß der starre Körper nur als Grenzfall des elastischen Körpers aufgefaßt werden darf und hat in Erfüllung dieser Forderung eine Ableitung des Prinzips

1) L. Boltzmann, Wien. Sitzungsber. 58. S. 517. 1868 (Ges. Abh. I. S. 49); 63. S. 731. 1871 (Ges. Abh. I. S. 307). Vorlesungen über Gastheorie II. Anm. auf S. 126, 127.

der virtuellen Verschiebungen gegeben, bei der die sonst üblichen starren Verbindungen durch elastische Kräfte ersetzt werden.¹⁾ Die gleiche Forderung, die Helmholtz für dynamische Betrachtungen erhoben hat, muß nun auch für statistische Untersuchungen geltend gemacht werden, denn diese beruhen auf jenen. Wenn ein Körper sich dynamisch für alle in Betracht kommenden Fälle mit hinreichender Genauigkeit wie ein ideal starrer Körper verhält, so muß dasselbe auch in statistischer Hinsicht gelten, oder mit anderen Worten: ideale Starrheit muß sich auch statistisch als stetiger Grenzfall elastischer Deformierbarkeit ergeben.

Wie kommt es aber dann, daß diese Forderung in dem oben angegebenen klassischen Beispiel verletzt wird? Die Antwort auf diese Frage kann nach unserer Auffassung nicht zweifelhaft sein: weil bei der Ableitung der Verteilungsfunktionen (1) und (2) als einzige Bewegungsinvariante die Energie Berücksichtigung gefunden hat, und weil mit dieser einen Invariante noch nicht genügend von dem dynamischen Charakter des Systems zum Ausdruck gebracht ist. Die Energiegleichung läßt unter Umständen — hier z. B. für große Werte von a — Fälle statistisch noch zu, die dynamisch — durch andere Bewegungsintegrale — ausgeschlossen werden.

In dieser Beziehung geben schon die Verhältnisse bei der Ableitung des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes zu denken. Setzt man die Gasmoleküle als ideal elastische Kugeln von verschwindendem Durchmesser voraus, nimmt man außerdem die Gültigkeit des Stoßzahlansatzes und molekulare Unordnung an²⁾, so ist das Ergebnis völlig bestimmt. Die alleinige Berücksichtigung des Energieintegrals liefert aber die richtige Verteilung nur für den Fall, daß die Gasmasse als Ganzes ruht. Die allgemeinste Verteilungsfunktion, auch für den Fall, daß eine translativ oder rotatorische Massenbewegung vorhanden ist, erhält man nur unter Mitberücksichtigung der Schwerpunkts- und Flächenintegrale. Nun wird allerdings in diesem Falle der Charakter der Wärmebewegung durch die Massenbewegung nicht beeinflusst, wohl aber die Form des Verteilungs-

1) H. v. Helmholtz, Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte. § 61. S. 281 ff. Leipzig 1911.

2) P. u. T. Ehrenfest, a. a. O.

gesetzes, und so zeigt sich auch schon hier die Wichtigkeit der Berücksichtigung aller Bewegungsinvarianten.

Solange bei unserem Modell die von der elastischen Bindung herrührenden Kräfte klein sind gegen die beim Stoße wirkenden Kräfte, wird der Stoß zwischen einem Atom m_1 und einem Atom m_2 genau so erfolgen, als ob auch m_1 frei wäre. Dann ist das Ergebnis des Stoßes vollständig durch Energie- und Schwerpunktssatz bestimmt, und Formel (1) liefert die richtige Verteilungsfunktion. Sobald aber die Bindungskräfte mit den Stoßkräften vergleichbar werden, oder — was dasselbe besagt — sobald die Stoßdauer mit der Eigenperiode des Oszillators vergleichbar wird¹⁾, hängt das Ergebnis des Stoßes auch noch von der elastischen Kraft a ab, und diese Abhängigkeit muß berücksichtigt werden. Genau wie bei der Aufstellung des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes muß man also bis auf den Elementarvorgang, d. h. in diesem Falle den Stoß zwischen einem gebundenen und einem freien Atom, zurückgehen, und die vollständige Behandlung würde die Aufstellung sämtlicher Bewegungsinvarianten, also die vollständige Integration des dynamischen Problems erfordern. Eine vollständige Integration ist nicht durchführbar, handelt es sich doch gewissermaßen um ein Dreikörperproblem, bei dem die Störungskräfte mit der Zentralkraft vergleichbar werden. Wir werden uns darum in diesem Paragraphen auf den Grenzfall beschränken, daß die Bindungskraft groß gegen die Stoßkraft ist; denn gerade dieser Grenzfall ermöglicht hinterher den Übergang zur starren Bindung.

Wir denken uns die Atome als Massenpunkte und setzen voraus, daß die Kräfte, die bei einem Stoß zwischen einem Atom m_1 und einem Atom m_2 wirksam werden, in die Richtung der Verbindungslinie fallen und Funktion des Abstandes

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

sind. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$(3) \quad m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -f(r) \frac{x_2 - x_1}{r} - a x_1,$$

$$(4) \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = f(r) \frac{x_2 - x_1}{r},$$

1) Man vgl. die Ausführungen auf S. 635, 636 und § 3.

nebst zwei weiteren Paaren analoger Gleichungen für die y - und z -Richtung.

Um zu einer Lösung der Gleichung (3) zu gelangen, die näherungsweise für große Werte von a gilt, verfahren wir folgendermaßen. Beachten wir, daß das erste Glied auf der rechten Seite implizit eine Funktion der Zeit ist:

$$(5) \quad -f(r) \frac{x_2 - x_1}{r} = X(t),$$

so läßt sich Gleichung (3) als lineare Differentialgleichung mit rechtem Glied auffassen:

$$(6) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{a x_1}{m_1} = \frac{X(t)}{m_1},$$

die formal integriert folgenden Ausdruck für x_1 liefert:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 = C_1 e^{i\nu t} + C_2 e^{-i\nu t} + \frac{e^{i\nu t}}{2i m_1 \nu} \int e^{-i\nu t} X(t) dt \\ - \frac{e^{-i\nu t}}{2i m_1 \nu} \int e^{i\nu t} X(t) dt. \end{aligned} \right.$$

Hier bedeuten C_1 und C_2 Konstanten, und

$$(8) \quad \nu = \sqrt{\frac{a}{m_1}}$$

die Eigenfrequenz¹⁾ des Oszillators. Durch wiederholte partielle Integration gelangt man von (7) zu der gesuchten Näherungslösung

$$(9) \quad x_1 = C_1 e^{i\nu t} + C_2 e^{-i\nu t} + \frac{X(t)}{m_1 \nu^2} - \frac{X''(t)}{m_1 \nu^4} + \frac{X^{(4)}(t)}{m_1 \nu^6} - \dots$$

Es ist zu beachten, daß $X(t)$ und seine zeitlichen Differentialquotienten sich durch die sechs Koordinaten x_1 bis z_2 und die sechs Geschwindigkeiten \dot{x}_1 bis \dot{z}_2 ausdrücken lassen. Für $X(t)$ folgt das aus seiner Definitionsgleichung (5); durch einmalige Differentiation erhält man

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} X'(t) = - \left(\frac{f'(r)}{r^2} - \frac{f(r)}{r^3} \right) [(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1) \\ \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + (z_2 - z_1)(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)] (x_2 - x_1) - \frac{f(r)}{r} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \end{aligned} \right.$$

1) Es ist zu beachten, daß in der vorliegenden Arbeit zur Vereinfachung des Satzes mit ν durchweg das 2π -fache der Größe bezeichnet wird, die sonst häufig, z. B. in der Strahlungsformel, darunter verstanden wird. Das Argument $h\nu/kT$ des Planckschen Gesetzes lautet also in unserer Schreibweise $h\nu/2\pi kT$.

und indem man mit Differenzieren fortfährt und immer die auftretenden zweiten Differentialquotienten der Koordinaten durch ihre Werte aus den Differentialgleichungen (3), (4) usw. ersetzt, gelangt man zu der erwähnten Darstellung.

Setzen wir von $f(r)$ voraus, daß es mit allen seinen Differentialquotienten für große Werte von r verschwindet, so gilt dasselbe von $X(t)$ für negativ und positiv große Werte von t . Ferner werden $X(t)$ und seine Differentialquotienten während des Stoßvorganges um so größere Werte annehmen, je näher die Masse m_2 an die Masse m_1 herankommt, d. h. je größer die lebendige Kraft L_2 von m_2 vor Beginn des Stoßes war. Die Gleichung (9) wird also bei gegebenem v erst für hinreichend kleine Werte von L_2 eine brauchbare Approximation liefern und bei gegebenem L_2 erst für hinreichend große Werte von v . Im allgemeinen gilt also die Reihenentwicklung (9) erst für hinreichend große Werte von v und hinreichend kleine Werte von L_2 . Sind aber diese Voraussetzungen erfüllt, so erkennt man aus (9) und der oben angegebenen Eigenschaft von $X(t)$, daß die Bewegung der Masse m_1 für Zeiten, die hinreichend lange nach dem Stoße liegen, die ungestörte Fortsetzung der Bewegung vor dem Stoße ist. Es treten zwar während des Stoßvorganges Störungen auf, aber insgesamt wird weder die Energie noch die Phase der Bewegung von m_1 geändert. Ebenso erlangt dann m_2 schließlich wieder seine ursprüngliche lebendige Kraft. Es liegen also — in Übereinstimmung mit der Forderung von Helmholtz — Verhältnisse vor, bei denen der Rückprall von m_2 sehr ähnlich erfolgt, wie an einer festen Wand. Dabei kann m_1 selbst noch Schwingungen ausführen, deren Energie erst im Grenzfall $v = \infty$ zu verschwinden braucht.

Gehen wir nun von (9) zu reellen Werten über, so finden wir für x_1 und \dot{x}_1

$$(11) \quad x_1 = A \sin(vt + \vartheta) + \frac{X(t)}{m_1 v^3} - \frac{X''(t)}{m_1 v^4} + \dots,$$

$$(12) \quad \dot{x}_1 = v A \cos(vt + \vartheta) + \frac{X'(t)}{m_1 v^2} - \frac{X'''(t)}{m_1 v^4} + \dots,$$

wo A die Amplitude und ϑ eine Phasenkonstante ist. Denkt man sich nun nach dem oben Gesagten $X(t)$ und seine Differentialquotienten durch die Werte der Koordinaten und Ge-

schwindigkeiten ausgedrückt, so läßt sich t eliminieren. Der so gewonnene Ausdruck

$$(13) \quad \left\{ \frac{m_1}{2} \left[\dot{x}_1 - \frac{X'}{m_1 v^2} + \frac{X''}{m_1 v^4} - \dots \right]^2 + \frac{a}{2} \left[x_1 - \frac{X}{m_1 v^2} + \frac{X''}{m_1 v^4} - \dots \right]^2 \right\} = \frac{a A^2}{2},$$

und zwei in y und z analog gebaute, stellen also Bewegungsinvarianten für hinreichend große Werte von v und hinreichend kleine Werte von L_2 dar.

Wir wollen nun im folgenden annehmen, daß für alle vor kommenden Fälle die Glieder mit v^{-2} eine ausreichende Annäherung darstellen und wollen außerdem die drei gefundenen Invarianten zu einer einzigen zusammenfassen.¹⁾ Schreiben wir noch

$$(14) \quad Y(t) = -f(r) \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad Z(t) = -f(r) \frac{z_2 - z_1}{r},$$

so erhalten wir demnach in

$$(15) \quad \left\{ I = \frac{m_1}{2} \left[\left(\dot{x}_1 - \frac{X'}{m_1 v^2} \right)^2 + \left(\dot{y}_1 - \frac{Y'}{m_1 v^2} \right)^2 + \left(\dot{z}_1 - \frac{Z'}{m_1 v^2} \right)^2 \right] + \frac{a}{2} \left[\left(x_1 - \frac{X}{m_1 v^2} \right)^2 + \left(y_1 - \frac{Y}{m_1 v^2} \right)^2 + \left(z_1 - \frac{Z}{m_1 v^2} \right)^2 \right] \right\}$$

einen Ausdruck, der neben der Gesamtenergie

$$(16) \quad \left\{ E = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{a}{2} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - \varphi(r) \right\}$$

$$\varphi(r) = \int f(r) dr$$

konstant sein muß. In diesem Grenzfall läßt übrigens der Ausdruck (15) eine besonders anschauliche Deutung zu. Die Bewegung des Atoms m_1 findet so statt, als ob es Pendelschwingungen um einen Nullpunkt ausführt, der um die Komponenten

$$\frac{X}{m_1 v^2}, \quad \frac{Y}{m_1 v^2}, \quad \frac{Z}{m_1 v^2}$$

verschoben ist, d. h. also in jedem Augenblick in Richtung der gerade wirkenden Kraft $f(r)$ um den Betrag $\xi = \frac{f(r)}{a}$,

1) Man vgl. hierzu die Ausführungen auf S. 639 und 640.

so daß sich die elastische Kraft $a\xi$ und die Stoßkraft $f(r)$ das Gleichgewicht halten. Die Beeinflussung der Bewegung von m_1 durch den Stoß mit m_2 ist also in dem betrachteten Grenzfall gewissermaßen als „statisch“ zu bezeichnen.

Wir wollen noch die Bedingung für die Gültigkeit der Näherungsformel (15) mit der „Stoßdauer“ in Beziehung bringen. Die Dauer eines Stoßes ist bei der Annahme stetig wirkender Kräfte ein Begriff, dessen scharfe Definition Schwierigkeit bereitet, genau wie etwa der Begriff der Wirkungssphäre. Es ist aber einleuchtend, daß die Zeitdauer merklicher Wechselwirkung zwischen einem Atom m_1 und einem Atom m_2 von entscheidender Bedeutung für die hier untersuchten Verhältnisse ist. Man könnte etwa so vorgehen, daß man unter der Stoßdauer τ diejenige Zeit versteht, während welcher die Kraft $f(r)$ größer ist als ein bestimmter Bruchteil des maximalen Betrages, den sie während des Stoßvorganges erreicht.

Für die folgende Betrachtung, die lediglich der Abschätzung einer Größenordnung dient, soll die einfache Vorstellung zugrunde gelegt werden, daß die Komponenten der Kraft während einer ganz bestimmten Zeit τ näherungsweise konstante Werte \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} haben. Bezeichnet man außerdem mit u_2 , v_2 , w_2 bzw. u_2' , v_2' , w_2' die Geschwindigkeitskomponenten von m_2 vor und nach dem Stoße, so ist also

$$(17) \quad \bar{X}\tau = m_2(u_2' - u_2), \quad \bar{Y}\tau = m_2(v_2' - v_2), \quad \bar{Z}\tau = m_2(w_2' - w_2).$$

Der Grenzfall idealer Starrheit der Atome m_1 ist um so näher realisiert, je geringer die während des Stoßes auf m_1 übertragene Energie im Vergleich mit der lebendigen Kraft von m_2 ist. Diese übertragene Energie läßt sich auf Grund von (11), (12) und der analogen Gleichungen für die y - und z -Richtung berechnen; sie ist bei der Beschränkung auf Glieder von der Ordnung v^{-2} nur potentieller Art, und ergibt sich zu

$$(18) \quad \bar{E} = \frac{1}{2m_1v^2}(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2).$$

Dabei ist der Mittelwert über alle Werte der Phasenkonstanten — bei konstant vorausgesetzter Energie

$$(19) \quad E_2 = \frac{m_2}{2}(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)$$

des stoßenden Moleküls — genommen.¹⁾

1) Man vgl. hierzu auch unten Formel (37).

Der von uns behandelte Grenzfall ist um so genauer verwirklicht, je kleiner das Verhältnis

$$(20) \quad \varepsilon = \frac{\bar{E}}{E_2}$$

ist. Dann ist aber auch näherungsweise

$$(21) \quad u_1' = -u_1, \quad v_1' = -v_1, \quad w_1' = -w_1,$$

so daß man aus (17) bis (21) erhält

$$(22) \quad \varepsilon = \frac{4m_2}{m_1 v^2 \tau^2}.$$

Sofern also nicht der triviale Fall vorliegt, daß m_1 groß gegen m_2 ist, kann ε nur klein sein, wenn $v\tau$ groß, d. h. die Stoßdauer τ groß gegen die Schwingungsdauer $2\pi/v$ ist.

Wir gehen nunmehr dazu über, eine Zustandsverteilung für unser dynamisches Modell aufzustellen, die sich stationär aufrecht erhält, wenn bei allen Stößen zwischen Atomen verschiedener Art die Voraussetzungen für die Konstanz von I erfüllt sind.¹⁾ Der mittlere Abstand zweier Atome soll so groß gegen die Wirkungssphäre sein, daß nur binäre Stöße berücksichtigt zu werden brauchen.

Da die Invariante I sich nicht additiv aus zwei Bestandteilen zusammensetzt, die einzeln von den Koordinaten und Geschwindigkeiten je eines Atoms abhängen, lassen sich auch keine Verteilungsfunktionen nach der Art von (1) und (2) angeben, bei denen die Häufigkeit einer bestimmten Phase des einen Atoms unabhängig von der Phase der Atome anderer Art ist. Man kann aber genau so verfahren, wie Boltzmann zu einer stationären Zustandsverteilung für zusammengesetzte

1) Nach dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz kommen Geschwindigkeiten beliebiger Größe — wenn auch entsprechend selten — vor, so daß bei strenger Gültigkeit des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes für die Atome m_2 die Voraussetzung der Konstanz von I nicht bei allen Stößen zutreffen könnte. Es ist aber zu bemerken, daß das Maxwell'sche Gesetz selbst nur ein Grenzgesetz für eine unendlich große Zahl von Atomen ist; wenn die Gesamtzahl der letzteren und die Gesamtenergie endlich sind, kann auch die Energie des einzelnen Teilchens nie über alle Grenzen steigen. Im übrigen genügt es, durch Vergrößerung von v und Verkleinerung der mittleren kinetischen Energie die Ausnahmefälle auf einen zu vernachlässigenden Bruchteil herunterzudrücken, da nur ein Grenzgesetz aufgestellt werden soll.

Gasmoleküle gelangt, wenn Wechselwirkung zwischen je zwei Molekülen besteht.¹⁾

Wir setzen nämlich die Zahl der Paare von Atomen verschiedener Art, für welche das Atom erster Art in der Phasenzelle

$$(23) \quad d\omega_1 = dx_1 dy_1 dz_1 d\dot{x}_1 d\dot{y}_1 d\dot{z}_1,$$

und das Atom zweiter Art in der Phasenzelle

$$(24) \quad d\omega_2 = dx_2 dy_2 dz_2 d\dot{x}_2 d\dot{y}_2 d\dot{z}_2$$

liegt, in der folgenden Weise an:

$$(25) \quad dN_{12} = A_{12} e^{-\alpha E - \beta I} d\omega_1 d\omega_2,$$

wo A_{12} , α und β konstant sind. Genau wie an der zitierten Stelle bei Boltzmann, läßt sich nach der Kirchhoffschen Methode beweisen, daß die Verteilung (25) durch die Stöße zwischen Atomen verschiedener Art nicht gestört wird. Es braucht also nur noch der Nachweis erbracht zu werden, daß dasselbe auch für die Stöße zwischen Atomen m_2 gilt.

Um zu dem Verteilungsgesetz für die Atome m_2 zu gelangen, hat man nur den Ausdruck (25) nach den Differentialen (23) zu integrieren. Nun ist nach unseren Voraussetzungen der Bruchteil der Atome zweiter Art, die jeweils in merklicher Wechselwirkung mit Atomen erster Art stehen, verschwindend klein; es genügt also zur Ausführung der angegebenen Integration solche Paare zu betrachten, die nicht gerade in Wechselwirkung befindlich sind. Für diesen Fall reduziert sich aber (25) bei passender Verfügung über die Konstante in $\varphi(r)$ auf

$$(26) \quad dN_{12} = A_{12} e^{-(\alpha + \beta)E_1 - \alpha E_2} d\omega_1 d\omega_2,$$

wenn

$$(27) \quad \begin{cases} E_1 = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{a}{2} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \\ E_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) \end{cases}$$

gesetzt wird. Führt man nun in (26) die Integration nach $d\omega_1$ aus, so ergibt sich für die freien Atome die Maxwellsche Verteilung, die bekanntermaßen durch Stöße der Atome m_2 unter sich nicht gestört wird.

1) L. Boltzmann, Vorl. üb. Gastheorie. II. IV. Abschn., §§ 36—40.

Es ist damit gezeigt, daß die durch (25) dargestellte Zustandsverteilung stationär ist. Es muß aber mit besonderem Nachdruck betont werden, daß die benutzte Methode hier, wie bei der Anwendung auf zusammengesetzte Moleküle, nur eine hinreichende, keineswegs aber eine notwendige Bedingung für stationären Zustand liefert, und auch das nur, insoweit das System der berücksichtigten Invarianten als erschöpfend angesehen werden kann. Die vorliegende Untersuchung verfolgt aber auch nur den Zweck zu zeigen, daß die Erfüllung der Helmholtzschen Forderung mit den Methoden der klassischen statistischen Mechanik erreichbar ist.

Schon die Gleichung (26) läßt erkennen, daß der Gleichverteilungssatz mit unserem Ansatz in Widerspruch steht¹⁾, und daß die statistische Unabhängigkeit der Energie der Oszillatoren von der mittleren lebendigen Kraft der freien Atome als Folge der vorausgesetzten dynamischen Unabhängigkeit in die Erscheinung tritt. Wir wollen aber die Berechnung der Mittelwerte an die genauere Gleichung (25) anknüpfen und konsequent Größen von der Ordnung ν^{-2} beibehalten. Es ist dabei zu berücksichtigen, daß sich wegen des Faktors $a = m_1 \nu^2$ die Ordnung einiger Glieder in (15) erniedrigt; andererseits sind x_1, y_1, z_1 als Größen anzusehen, die mindestens von der Ordnung ν^{-1} klein sind, so daß auch keine weiteren Glieder aus (3) berücksichtigt zu werden brauchen.

Führt man noch die Substitution

$$(28) \quad \begin{cases} x_2 - x_1 = r \cos \vartheta, & y_2 - y_1 = r \sin \vartheta \cos \chi, \\ & z_2 - z_1 = r \sin \vartheta \sin \chi \end{cases}$$

und demgemäß

$$(29) \quad dx_2 dy_2 dz_2 = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\chi$$

aus, so lassen sich sämtliche Integrationen bis auf diejenige nach r ausführen. Mit der angegebenen Genauigkeit findet man

$$(30) \quad \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} = \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \frac{\int \left[1 + \frac{2\beta}{3(\alpha + \beta)m_1 \nu^2} \left(f'(r) + \frac{2f(r)}{r} \right) \right] e^{\varphi_2(r)} \cdot \varphi_1(r) dr}{\int e^{\varphi_2(r)} \varphi_1(r) dr}$$

mit der Bedeutung

1) Weil $m_1 \dot{x}_1^2/2$ und $m_2 \dot{x}_2^2/2$ im Exponenten von (26) mit verschiedenen Faktoren multipliziert auftreten.

$$(31) \begin{cases} \varphi_1(r) = \left(\frac{2\pi}{m_1(\alpha + \beta)} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{\beta}{(\alpha + \beta)m_1 v^2} \left(f'(r) + 2 \frac{f(r)}{r} \right) \right], \\ \varphi_2(r) = \alpha \varphi(r) - \frac{\alpha \beta}{2(\alpha + \beta)} \frac{f''(r)}{m_1 v^2}. \end{cases}$$

Demnach ist der Mittelwert der zur Koordinate x_1 gehörigen lebendigen Kraft für solche Paare, die den Abstand r haben,

$$(32) \quad \left(\frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} \right)_r = \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \left[1 + \frac{2\beta}{3(\alpha + \beta)m_1 v^2} \left(f'(r) + 2 \frac{f(r)}{r} \right) \right],$$

und die gleiche Formel gilt als allgemeiner Mittelwert, wenn man unter r auf der rechten Seite einen passend gewählten Mittelwert versteht.

In gleicher Weise ergibt sich

$$(33) \quad \left(\frac{\alpha x_1^2}{2} \right)_r = \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \left[1 + \frac{\beta^2}{(\alpha + \beta)m_1 v^2} \frac{f''(r)}{3} \right];$$

auch diese Formel kann als Gesamtmittelwert aufgefaßt werden, dabei bedeutet dann aber im allgemeinen r einen anderen Mittelwert als bei der entsprechenden Auffassung der Formel (32).

Gleiche Formeln wie (32) und (33) gelten für die y - und z -Komponente; hierzu ist jedoch folgendes zu bemerken. Wir haben auf S. 634 drei Invarianten zu einer einzigen zusammengezogen und bei Aufstellung des statistischen Gesetzes nur diese eine berücksichtigt, was scheinbar im Widerspruch mit unserer Forderung steht, daß alle Invarianten berücksichtigt werden müssen. Hätten wir nun die drei unabhängigen Invarianten beibehalten, so würden wir jetzt gefunden haben, daß die mittleren kinetischen und potentiellen Energien für die drei Koordinatenrichtungen voneinander unabhängig sind.

Dieses Ergebnis steht vollständig in Übereinstimmung mit unseren dynamischen Voraussetzungen. Denken wir uns etwa einen Anfangszustand, bei dem die Atome m_1 räumlich von den m_2 getrennt sind und einen gewissen Energieinhalt haben; dann mögen zu irgendeiner Zeit die m_2 mit den m_1 in Wechselwirkung treten, und es werde nach dem schließlich sich einstellenden stationären Zustand gefragt. Ist die Gesamtenergie der m_2 hinreichend niedrig und v hinreichend groß, so behält jedes Atom m_1 für alle Zeiten in jeder der drei Koordinatenrichtungen die Energie bei, die es zu Beginn hatte, und ein

Ausgleich erfolgt nur zwischen den m_2 unter sich. War also etwa die Anfangsverteilung der Energie unter die m_1 zwar so, daß sie sich stationär erhält, aber anisotrop, so würde sie das für alle Zeiten bleiben. Der innere Grund dafür ist, daß bei einem harmonischen Oszillator die Energien der Bewegung in den drei Koordinatenrichtungen Einzelinvarianten sind.

Indem wir also die drei auf S. 634 gefundenen asymptotischen Invarianten zusammenzogen, haben wir lediglich Fälle von Anisotropie in den Anfangsbedingungen ausgeschlossen.

Für die mittleren kinetischen Energien der freien Atome erhalten wir mit der angegebenen Genauigkeit

$$(34) \quad \frac{m_1 \bar{x}_1^2}{2} = \frac{m_2 \bar{y}_1^2}{2} = \frac{m_2 \bar{z}_1^2}{2} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Es sind nun noch die Konstanten A_{12} , α und β zu bestimmen.¹⁾ A_{12} hängt in bekannter Weise mit der Gesamtzahl der Atome zusammen; wegen der Beziehungen (34) werden wir

$$(35) \quad \frac{1}{2\alpha} = \frac{kT}{2}$$

setzen müssen, wo k die Boltzmannsche Konstante ist, und β bestimmen wir so, daß der Helmholtzschen Forderung genügt wird.

Die Formeln (32) und (33) zeigen, daß unter unseren Voraussetzungen die mittlere kinetische Energie der Atome m_1 von ihrer mittleren potentiellen Energie verschieden ist und daß beide vom Gleichverteilungswerte $1/2\alpha$ abweichen. Sie lassen sich durch Vergrößerung von β beliebig verkleinern, und der Helmholtzschen Forderung kann jedenfalls genügt werden, wenn man annimmt, daß $\lim_{r \rightarrow \infty} \beta = \infty$ ist. Setzen wir also in den Gleichungen (32) und (33) $\beta = \infty$, so wird

$$(36) \quad \frac{m_1 \bar{x}_1^2}{2} = 0,$$

$$(37) \quad \left(\frac{\alpha x_1^2}{2} \right)_r = \frac{f^2(r)}{6 m_1 r^2}.$$

Es ist also dann die Energie, die von den Oszillatoren aufgenommen wird, nur potentieller Art; die kinetische Energie,

1) Man vgl. hierzu auch die Ausführungen auf S. 654, 655.

die notwendigerweise mit den zeitlichen Änderungen von x_1, y_1, z_1 verknüpft ist, erweist sich als klein von höherer Ordnung. In der Tat ist mit der Annahme $\beta = \infty$ über die Energie der Oszillatoren in einem wie oben (S. 639) charakterisierten Anfangszustande so verfügt, daß sie verschwindet; sie bleibt dann auch im stationären Endzustande dauernd gleich Null, außer während der Perioden der Wechselwirkung, wenn $f(r) \neq 0$ ist. Unter diesen Umständen führen die Oszillatoren gar keine Schwingungen aus, sondern folgen nur der „langsamen“ Bewegung der auf sie stoßenden freien Atome. Auch dieser Rest von Beeinflussung verschwindet einerseits mit zunehmendem ν , andererseits aber auch mit abnehmender mittlerer lebendiger Kraft der stoßenden Atome, d. h. also mit abnehmender Temperatur. Denn je kleiner die lebendige Kraft eines stoßenden Atoms ist, desto größer ist der Wert von r , bei dem es umkehrt, und um so kleiner ist dementsprechend im Mittel der Wert von $f(r)$.

Unsere bisherigen Betrachtungen, die auf den extremen Grenzfall $\nu \tau > 1$ beschränkt sind (vgl. S. 636), beweisen nur, daß man der Helmholtzschen Forderung durch die Annahme $\lim_{\nu = \infty} \beta = \infty$ genügen kann, ohne mit den Grundlagen der klassischen statistischen Mechanik in Widerspruch zu geraten. Der Beweis, daß auf Grund der gleichen Prinzipien $\lim_{\nu = \infty} \beta = \infty$ sein muß, gelingt erst durch Aufstellung einer umfassenderen Invariante und wird im dritten Paragraphen erbracht werden (man vgl. S. 655).

§ 2. Rotatoren im Grenzfall kleinen Trägheitsmoments und tiefer Temperatur.

Ähnliche Verhältnisse wie bei Oszillatoren, liegen auch bei Rotatoren vor, wenn man die Umlaufszahl bei diesen mit der Schwingungsfrequenz bei jenen in Parallele setzt. Solange die Dauer eines Stoßvorganges klein gegen die Umlaufszeit des Rotators ist, kann ein vollständiger Austausch der Energie mit den freien Molekülen stattfinden; wenn aber die Umlaufszeit klein gegen die Stoßdauer ist, läßt sich voraussehen, daß die Rotationsenergie näherungsweise unbeeinflussbar durch Stöße wird, weil dann während des gesamten Stoßvorganges die positiven und negativen Drehimpulse sich annähernd aufheben.

Es besteht der wesentliche Unterschied gegen den Oszillator, daß die Umdrehungszahl nicht wie die Eigenfrequenz ein Systemparameter ist; als solcher kommt vielmehr nur das Trägheitsmoment in Frage. Nach der üblichen Auffassung müßte die mittlere Energie, die zu einem rotatorischen Freiheitsgrade ϑ gehört, den normalen Betrag $kT/2$ haben, unabhängig vom Werte des Trägheitsmoments J ; nach dem soeben Ausführten sind jedoch Abweichungen von der Gleichverteilung zu erwarten für solche Werte der Temperatur und des Trägheitsmoments, für welche die aus der Gleichung

$$(38) \quad \frac{J\dot{\vartheta}^2}{2} = \frac{kT}{2}$$

berechnete Umlaufsdauer klein gegen die Stoßdauer ist. Dabei hängt natürlich auch die mittlere Stoßdauer von der Temperatur ab (vgl. S. 645).

Wir beschränken die folgenden Rechnungen auf den einfachsten, zweidimensionalen Fall, der das prinzipiell Wichtige bereits hervortreten läßt. Wir denken uns also in einer Ebene Massenpunkte m_1 , die nur im festen Abstand ϱ um gegebene feste Punkte rotieren können; außerdem gebe es Massenpunkte m_2 , die frei beweglich in der Ebene sind. Wir untersuchen einen Stoß zwischen einem Atom m_1 und einem Atom m_2 und beschränken uns auf den Fall, daß der Rotator vor Beginn des Stoßes bereits eine sehr große Umlaufgeschwindigkeit $\dot{\vartheta} = v$ hat.

Das Rotationszentrum O von m_1 machen wir zum Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems und verwenden außer den kartesischen Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 Polarkoordinaten ϱ, ϑ für m_1 mit O als Pol, und Polarkoordinaten r, ψ für m_2 mit m_1 als Pol. Es sollen also die folgenden Beziehungen gelten

$$(39) \quad \begin{cases} x_1 = \varrho \cos \vartheta, & y_1 = \varrho \sin \vartheta, & \varrho = \text{const}; \\ x_2 - x_1 = r \cos \psi, & y_2 - y_1 = r \sin \psi, \\ r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen lauten die Bewegungsgleichungen (man vgl. die Figur)

$$(40) \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = f(r) \cos \psi, \quad m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = f(r) \sin \psi,$$

$$(41) \quad J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \varrho f(r) \sin \delta = \varrho f(r) \sin (\vartheta - \psi).$$

Um außer der Energie

$$(42) \quad E = \frac{J}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - \varphi(r)$$

$$\varphi(r) = \int f(r) dr$$

einen Ausdruck zu gewinnen, der unter unseren Voraussetzungen näherungsweise eine Stoßinvariante darstellt, setzen wir

$$(43) \quad \vartheta = \nu t + \vartheta_1,$$

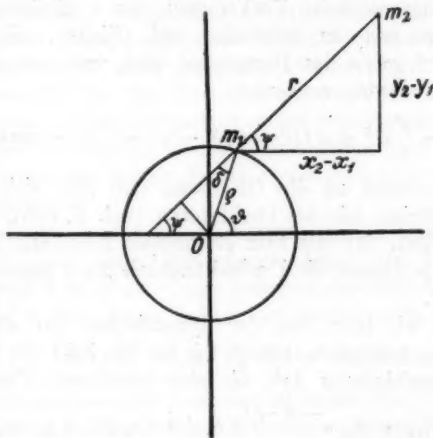


Fig. 1.

wo ν die oben definierte Konstante ist. Durch diese Substitution erhalten wir aus (41) für ϑ_1 die Differentialgleichung

$$(44) \quad J \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} = \varrho f(r) \sin \nu t \cos (\vartheta_1 - \psi) + \varrho f(r) \cos \nu t \sin (\vartheta_1 - \psi).$$

Indem wir nun hier, ähnlich wie oben (vgl. S. 632), $f(r)$, ϑ_1 und φ auf der rechten Seite als Funktionen der Zeit auffassen, erhalten wir durch schrittweise partielle Integration unter Berücksichtigung von (43)

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \vartheta}{dt} &= \nu - \frac{\varrho}{J \nu} f(r) \cos (\vartheta_1 - \psi) + \frac{\varrho}{J \nu^2} \left[\sin \nu t \frac{d}{dt} (f(r) \cos (\vartheta_1 - \psi)) \right. \\ &\quad \left. + \cos \nu t \frac{d}{dt} (f(r) \sin (\vartheta_1 - \psi)) \right] + \dots \end{aligned} \right.$$

Über die Integrationskonstante ist bereits so verfügt, daß vor Beginn des Stoßes $d\vartheta/dt = \nu$ ist, und die Formel (45) läßt erkennen, daß innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches nach dem Stoß die Umlaufgeschwindigkeit schließlich wieder ihren ursprünglichen Wert ν annimmt; nur während der Periode der Wechselwirkung findet eine vorübergehende Störung statt. Die Approximation gilt — analog wie oben (vgl. S. 633) — für hinreichend große Werte von ν und hinreichend niedrige Werte der lebendigen Kraft des stoßenden freien Atoms.

In sämtlichen Gliedern der rechten Seite läßt sich wiederum das explizite Vorkommen von t eliminieren. Wir beschränken uns im folgenden auf Glieder, die von der Ordnung ν^{-2} gegen das Hauptglied sind, und gewinnen somit die gesuchte Grenzinvariante

$$(46) \quad I = \frac{J}{2} \dot{\vartheta}^2 + \varrho f(r) \cos(\vartheta - \psi) = \frac{J}{2} \nu^2 = \text{const.}$$

Im Anschluß an die Gleichung (45) läßt sich in genau derselben Weise, wie bei Oszillatoren (vgl. S. 635), der Nachweis erbringen, daß die hier gewonnene Näherung um so genauer gilt, je kleiner die Umdrehungszeit $2\pi/\nu$ gegen die Stoßdauer τ ist.

Indem wir jetzt von der dynamischen zur statistischen Betrachtung übergehen, setzen wir für die Zahl der Paare von Atomen verschiedener Art, die eine bestimmte Phase haben,

$$(47) \quad dN_{11} = A_{11} e^{-\alpha E - \beta I} d\vartheta d\dot{\vartheta} dx_2 d\dot{x}_2 dy_2 d\dot{y}_2.$$

Unter E und I sind naturgemäß hier die Ausdrücke (42) und (46) zu verstehen; alle darin auftretenden Variablen sind durch ϑ , x_2 und y_2 ausgedrückt zu denken. Es läßt sich genau wie früher zeigen, daß die Verteilung (47) stationär ist; für die freien Atome gilt das Maxwellsche Gesetz.

Scheidet man wieder diejenigen Paare aus, die gerade in Wechselwirkung stehen, so erhält man

$$(48) \quad dN_{12} = A_{12} e^{-(\alpha + \beta) \frac{J}{2} \dot{\vartheta}^2 - \alpha \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)} d\vartheta d\dot{\vartheta} dx_2 d\dot{x}_2 dy_2 d\dot{y}_2.$$

Von diesem Ausdruck unterscheidet sich (47) durch Glieder im Exponenten, die nur Lagekoordinaten enthalten. Demnach erhält man für die Energiemittelwerte ohne weitere Rechnung

$$(49) \quad \frac{J \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{1}{2(\alpha + \beta)},$$

$$(50) \quad \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} = \frac{m_2 \dot{y}_2^2}{2} = \frac{1}{2\alpha},$$

und zwar gelten diese Ergebnisse bis auf Zusatzglieder von der Ordnung ν^{-4} .

Im Falle des Oszillators haben wir die Konstante β aus der Forderung bestimmt, daß im Grenzfalle $\nu = \infty$ die mittlere Energie des Oszillators verschwinden soll. Diese Forderung kann beim Rotator natürlich nicht erhoben werden, denn bei ihm steigt die Energie mit ν ins Unendliche; unsere Betrachtungen gelten jetzt auch gar nicht für den Grenzfall $\nu = \infty$, sondern lediglich für den Grenzfall $\nu \tau = \infty$. Es muß darum auch zunächst festgestellt werden, unter welchen physikalischen Bedingungen dieser Fall vorliegt, und dafür muß wenigstens eine Schätzung der Stoßdauer auf dynamischer Grundlage versucht werden.

Untersucht man nun den Stoßvorgang zwischen einem freien und einem *starr* gebundenen Atom auf Grund eines Kraftgesetzes $f(r) = \gamma r^{-n}$ und definiert die Stoßdauer so, wie wir es auf S. 635 getan haben, so erweist sich für *zentrale* Stöße $\tau \sim L_2^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right)}$, wenn L_2 wieder die kinetische Energie des freien Atoms bedeutet. Demnach ist im Mittel $\tau \sim T^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right)}$; da andererseits in demjenigen Temperaturbereich, wo Gleichverteilung herrscht, $\nu \sim T^{1/2}$ ist, liegt der klassische Fall $\nu \tau < 1$ bei hohen Temperaturen, und der von uns untersuchte Grenzfall bei tiefen Temperaturen vor. Dabei werden Abweichungen von der Gleichverteilung und somit auch der von uns behandelte Grenzfall bei um so höheren Temperaturen eintreten, je kleiner das Trägheitsmoment des Rotators ist.

Unsere Formeln sind mit der Annahme vereinbar, daß eine Nullpunktsenergie E_0 bei Rotatoren existiert; man braucht dafür nur für ihren Gültigkeitsbereich

$$(51) \quad \frac{1}{2(\alpha + \beta)} = E_0,$$

d. h. also

$$(52) \quad \beta = \frac{1}{2E_0} - \frac{1}{kT}$$

zu setzen. Dabei soll E_0 nicht von der Temperatur abhängen, kann aber möglicherweise noch Funktion des Trägheitsmoments J sein.¹⁾ Dynamisch ist die Nullpunktsenergie so zu erklären, daß bei der Abkühlung eines Körpers, der Rotatoren enthält, schließlich eine Temperatur erreicht wird, bei der die Stöße zu langsam erfolgen, um den Rotatoren den Rest ihrer Energie zu entziehen.

§ 3. Lineare Oszillatoren für beliebige Werte von ν und T .

Die Ausführungen der beiden ersten Paragraphen zeigen, daß bei Oszillatoren und Rotatoren auf Grund der dynamischen Verhältnisse Abweichungen vom Gleichverteilungssatze bei tiefen Temperaturen zu erwarten sind, wenn die endliche Dauer der Stöße berücksichtigt wird. Die Abweichungen müssen bei um so höheren Temperaturen einsetzen, je größer die Eigenfrequenz der Oszillatoren und je kleiner das Trägheitsmoment der Rotatoren ist. Unsere bisherigen Rechnungen ergeben aber nur eine asymptotische Lösung für den Grenzfall $\nu\tau \gg 1$.

Es ist einleuchtend, daß ein stetiger Übergang zwischen unseren Lösungen ($\nu\tau \gg 1$) und der normalen Gleichverteilung ($\nu\tau \ll 1$) existieren muß; aber dieser Übergang würde sich nur durch vollständige Integration der dynamischen Probleme (3), (4) und (40), (41) gewinnen lassen. Es müßten diejenigen allgemein gültigen Bewegungsinvarianten aufgestellt werden, die für große Werte von $\nu\tau$ in unsere Gleichungen (13) bzw. (46) übergehen. Da diese Aufgabe an mathematischen Schwierigkeiten scheitert, wollen wir, um wenigstens einen qualitativen Überblick für beliebige Werte von $\nu\tau$ zu gewinnen, den Fall des Oszillators im folgenden unter vereinfachenden rechnerischen Annahmen behandeln.

Ein Blick auf die Gleichungen (7) und (4) lehrt, daß das dynamische Problem integrabel wird, wenn die beim Stoß wirkenden Kraftkomponenten als Funktionen der Zeit bekannt sind. Wäre das Problem gelöst, so ließen sich diese Zeitfunktionen bestimmen. Wir wollen umgekehrt annehmen, daß die Kräfte explizit

1) Wollte man es z. B. als erwiesen ansehen, daß Rotatoren eine Nullpunktsenergie vom Betrage $h\nu/4\pi$ haben (vgl. Anm. S. 632), so würde sich daraus $E_0 = \frac{h^2}{8\pi^2 J}$ errechnen.

als Funktionen der Zeit gegeben sind und wollen über diese Funktionen geeignete Annahmen machen. Zur weiteren Vereinfachung der Rechnung wollen wir ein noch elementareres dynamisches Modell als im ersten Paragraphen betrachten, indem wir die Bewegungsfreiheit auf eine Koordinate beschränken. An dem so entstehenden „linearen Körper“ treten die prinzipiell wichtigen Punkte bereits zutage, es sei aber bemerkt, daß diese Vereinfachung für die Durchführbarkeit der Rechnung nicht wesentlich ist.

Wir nehmen also nunmehr an, die elastisch gebundenen Atome m_1 und die freien Atome m_2 seien nur auf einer Geraden beweglich, die wir zur x -Achse wählen. Der mittlere Abstand sei, wie bisher, groß gegen die Wirkungssphäre, und zwischen je zwei gebundenen Atomen mögen sich viele freie befinden. Unsere früheren Gleichungen (3) bis (8) bleiben bestehen, wenn man sich r durch $|x_2 - x_1|$ ersetzt denkt.

Die beim Stoß wirksame Kraft denken wir uns in der Form

$$(53) \quad X(t) = X_0 g\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

gegeben. X_0 soll eine Konstante sein und g eine gerade Funktion¹⁾ der dimensionslosen Zahl t/τ , die für Werte $\left|\frac{t}{\tau}\right| > 1$ mit wachsendem $\left|\frac{t}{\tau}\right|$ schnell gegen 0 abfällt und integrierbar ist. Damit ist τ als ein Maß der Stoßdauer charakterisiert. Ferner sei noch über X_0 und g so verfügt — was immer möglich ist —, daß

$$(54) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) ds = 1,$$

und somit

$$(55) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) dt = X_0 \tau$$

1) Die Beschränkung auf gerade Funktionen ist wiederum nicht wesentlich; die Formeln werden aber etwas schwerfälliger, wenn man diese Annahme fallen läßt. Wir haben ferner mit dem Ansatz (53) so über den Nullpunkt der Zeit verfügt, daß er mitten im Stoß angenommen wird; auch diese Einschränkung ist unwesentlich und kann durch eine Substitution $t' = t - t_0$ gehoben werden.

wird. Dann ist X_0 ein Maß für die Größe der Kraft während des Stoßes.

Die Stoßdauer ist natürlich nicht als Konstante, sondern als Funktion der Anfangsbedingungen zu denken; als solche können angenommen werden die Einzelenergien E_1 und E_2 der beiden Massenpunkte, die Lage von m_2 und die Phase von m_1 zu irgendeinem Zeitpunkte vor dem Stoße. Die Stoßzeit darf aber nicht als beliebige Funktion der Anfangsdaten angesehen werden. Der umgekehrte Stoß, der durch Umkehr aller Geschwindigkeiten in irgendeinem Zeitpunkte nach dem Stoße entsteht, muß dynamisch ebensogut möglich sein, wie der direkte, und muß die gleiche Stoßdauer ergeben. Demnach darf τ nur als Funktion solcher Kombinationen der Anfangsdaten angesehen werden, die beim Stoß ungeändert bleiben; oder mit anderen Worten: die Stoßzeit ist selbst eine Stoßinvariante.

Wir wollen mit der Gleichung (7) zu reellen Werten übergehen; dann wird unter Einführung der Amplitude A und einer Phasenkonstante ϑ :

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= A \sin(\nu t + \vartheta) + \frac{\sin \nu t}{\nu m_1} \int \cos \nu t X(t) dt \\ &\quad - \frac{\cos \nu t}{\nu m_1} \int \sin \nu t X(t) dt. \end{aligned} \right.$$

Substituiert man hier (53) und unterscheidet die Variablen nach dem Stoß von denen vor dem Stoß durch einen Akzent, so erhält man unter Berücksichtigung des Umstandes, daß g gerade vorausgesetzt wurde,

$$(57) \quad x_1 = A \sin(\nu t + \vartheta)$$

vor dem Stoß, und

$$(58) \quad x_1' = A' \sin(\nu t + \vartheta') = A \sin(\nu t + \vartheta) + \frac{X_0 \tau}{\nu m_1} \chi^{-1}(\nu \tau) \sin \nu t$$

nach dem Stoß.

Dabei ist nach Ersetzung von t/τ durch s

$$(59) \quad \chi^{-1}(\nu \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\nu \tau \cdot s) g(s) ds$$

gesetzt. Die Integration in (59) ist streng genommen nur von einem negativ großen Werte von t/τ („vor dem Stoß“) bis zu einem positiv großen Werte („nach dem Stoß“) zu erstrecken; dafür können aber ohne Bedenken die Grenzen $-\infty$

und $+\infty$ gesetzt werden. Von der Funktion $\chi(\nu\tau)$ läßt sich aussagen, daß sie im $\lim \nu\tau = 0$ gegen 1 konvergiert, und im $\lim \nu\tau = \infty$ selbst unendlich wird. Erstere Eigenschaft folgt aus der Festsetzung (54), letztere aus der Tatsache, daß $\lim_{\nu\tau \rightarrow \infty} \chi^{-1}(\nu\tau) = 0$ ist, wie entweder aus der früher durchgeführten Betrachtung dieses Grenzfalles hervorgeht¹⁾, oder aus der Anwendung eines bekannten Satzes von Dirichlet auf die Gleichung (59).

Durch Differentiation von (57) und (58) erhält man

$$(60) \quad \dot{x}_1 = \nu A \cos(\nu t + \vartheta),$$

$$(61) \quad \dot{x}_1' = \nu A' \cos(\nu t + \vartheta') = \nu A \cos(\nu t + \vartheta) + \frac{X_0 \tau}{m_1} \chi^{-1}(\nu\tau) \cos \nu t.$$

Nun gelten die Gleichungen (58) und (61) für alle Zeiten nach dem Stoß; setzt man also für t ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi/\nu$, also etwa $t = z \cdot 2\pi/\nu$, wo z eine ganze Zahl und so groß ist, daß $z \cdot 2\pi/\nu$ der Zeit „nach dem Stoß“ angehört, so findet man aus (58) und (61)

$$(62) \quad A' \sin \vartheta' = A \sin \vartheta,$$

$$(63) \quad \nu A' \cos \vartheta' = \nu A \cos \vartheta + \frac{X_0 \tau}{m_1} \chi^{-1}(\nu\tau).$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen läßt sich nun noch X_0 eliminieren. Durch Integration der Gleichung (4) nach der Zeit findet man nämlich unter Berücksichtigung von (55)

$$(64) \quad m_2 \dot{x}_2 - m_2 \dot{x}_2' = X_0 \tau,$$

so daß man aus (63) erhält

$$(65) \quad m_1 \chi(\nu\tau) \nu A' \cos \vartheta' + m_2 \dot{x}_2' = m_1 \chi(\nu\tau) \nu A \cos \vartheta + m_2 \dot{x}_2.$$

Sehen wir also von der Stoßperiode ganz ab und vergleichen nur die Werte der Variablen vor und nach dem Stoße, so gestatten die Gleichungen (62) und (65) zusammen mit dem Energieintegral

$$(66) \quad E = \frac{m_1 \nu^2}{2} A^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 = \frac{m_1 \nu^2}{2} A'^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2'^2$$

die Werte A' , ϑ' , \dot{x}_2' aus A , ϑ , \dot{x}_2 zu berechnen, sobald τ als bekannt angenommen wird.

1) Man vgl. etwa die Gleichung (58) mit (11).

Zugleich haben wir mit den linken oder rechten Seiten von (62) und (65), wie die Form dieser Gleichungen zeigt, die gesuchten „Stoßinvarianten“ gefunden, sofern wiederum von der Stoßperiode selbst abgesehen wird. Man erkennt ohne weiteres, daß (65) im Grenzfall $\nu = 0$ in das Schwerpunktsintegral übergeht, denn es ist $\lim_{\nu \tau = 0} \chi(\nu \tau) = 1$, und, wie aus

(60) hervorgeht, $\nu A \cos \vartheta$ die konstante Geschwindigkeit, in die \dot{x}_1 im Grenzfall $\nu = 0$ übergeht. Da $\chi(\nu \tau)$ mit wachsendem ν über alle Grenzen wächst, kann man die Invariante (65) so auffassen, als ob die für die Berechnung der Schwerpunktsbewegung maßgebende Masse $m_1 \chi(\nu \tau)$ mit zunehmender elastischer Bindung unbegrenzt zunimmt.

Die Form der Gleichungen (62) und (65) ist für das Folgende nicht brauchbar; wir quadrieren darum noch beide Gleichungen und erhalten dann durch Addition folgenden ebenfalls invarianten Ausdruck

$$(67) \quad I = m_1^2 \nu^2 \chi^2(\nu \tau) A^2 + 2 m_1 m_2 \nu \chi(\nu \tau) \cos \vartheta A \dot{x}_2 + m_2^2 \dot{x}_2^2.$$

Diese Invariante geht für den Grenzfall $\nu = 0$ in das Quadrat des Schwerpunktsintegrals und im Grenzfall $\nu = \infty$, in Übereinstimmung mit dem früher Abgeleiteten, in die mit $2 m_1 \chi^2(\nu \tau)$ multiplizierte asymptotische Invariante

$$(68) \quad E_1 = \frac{m_1 \nu^2}{2} A^2 = \frac{a}{2} x_1^2 + \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2$$

über.

Wir wollen noch für die Funktion $X(t)$ (Gleichung (59)) zwei spezielle, im übrigen völlig willkürliche, Beispiele angeben. Nimmt man für das Kraftgesetz den unstetigen Verlauf

$$(69) \quad g\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & \left|\frac{t}{\tau}\right| < \frac{1}{2}, \\ 0, & \left|\frac{t}{\tau}\right| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

so ergibt sich

$$(70) \quad \chi(\nu \tau) = \frac{\frac{\nu \tau}{2}}{\sin \frac{\nu \tau}{2}}.$$

Setzt man dagegen

$$(71) \quad g\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}, \quad -\infty \leq t \leq +\infty,$$

so wird

$$(72) \quad \chi(\nu\tau) = e^{i\nu\tau}.$$

Wir gehen jetzt zur statistischen Betrachtung über und gewinnen eine stationäre Zustandsverteilung in derselben Weise, wie in dem früher betrachteten Grenzfall. Im Interesse der später auszuführenden Integrationen empfiehlt es sich, von vornherein statt der Variablen x_1 und \dot{x}_1 die Amplitude A und die Phasenkonstante ϑ einzuführen. Es ist dann das Produkt der Differentiale $d\dot{x}_1 dx_1$ durch $\nu A dA d\vartheta$ zu ersetzen.

Wir setzen also für die Zahl der Paare von Atomen erster und zweiter Art, deren Phasenpunkt in der Phasenzelle

$$(73) \quad d\omega = A dA d\vartheta d\dot{x}_2$$

liegt,

$$(74) \quad dN_{12} = C e^{-\alpha E - \beta' I} d\omega,$$

wo E und I durch (66) bzw. (67) gegeben sind.

Es ist zu bemerken, daß die „Schwerpunktsinvariante (65)“ für die Aufstellung des statistischen Gesetzes nicht brauchbar ist, weil sie eine von Null verschiedene mittlere Geschwindigkeit für die Atome m_2 liefern würde. Bei dem Ansatz (74) ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit beider Atomsorten gleich Null, aber er liefert für die freien Atome nicht genau die Maxwellsche Verteilung. Darüber sind einige Worte zu sagen.

Wir gehen dafür von dem Grenzfall $\nu = 0$ aus; in diesem Falle reduziert sich unser „linearer Körper“ auf ein „lineares Gas“, das aus zwei Atomsorten besteht, mit dem Verteilungsgesetz (vgl. S. 650)

$$(75) \quad dN_{12} = C e^{-\alpha \left(\frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 \right) - \beta' (m_1^2 \dot{x}_1^2 + 2 m_1 m_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + m_2^2 \dot{x}_2^2)} d\dot{x}_1 d\dot{x}_2.$$

Dieses Verteilungsgesetz liefert zwar formal für die Geschwindigkeiten \dot{x}_1 und \dot{x}_2 einzeln genommen das Maxwellsche Gesetz, wie man durch Integration nach $d\dot{x}_2$ bzw. $d\dot{x}_1$ feststellen kann; es besteht aber der wesentliche Unterschied, daß dN_{12} nicht einfach proportional dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten für die Geschwindigkeiten \dot{x}_1 und \dot{x}_2 ist. Der Stoßzahlansatz ist also aufgegeben und eine Koppelung

der Geschwindigkeiten angenommen, wie sie von Burbury nachdrücklich gefordert worden ist.¹⁾

Bei Maxwell wird als unabhängiges Elementarereignis das Auftreten einer Geschwindigkeit von gegebenen Komponenten ξ, η, ζ angesehen; daher wird die Existenz einer Verteilungsfunktion $F(\xi, \eta, \zeta)$ vorausgesetzt, derart, daß

$$(76) \quad dN = F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

die Anzahl der Atome von der gegebenen Geschwindigkeit ist. Nun ist aber das Auftreten einer bestimmten Geschwindigkeit kein unabhängiges Ereignis, weil das einzelne Atom kein dynamisch unabhängiges System ist. Es muß also F so bestimmt werden, daß es durch die Stöße nicht gestört wird, was nur mit Hilfe des Stoßzahlansatzes gelingt.

Dem Ansatz (75) liegt dagegen die Auffassung zugrunde, daß als unabhängiges Elementarereignis, und damit als nicht mehr auflösbares Wahrscheinlichkeitselement, das Auftreten eines Paares von Atomen mit gegebenen Geschwindigkeiten zu gelten hat. Diese Auffassung ist allgemeiner und zulässiger als ein Ansatz von der Form (76), weil ein Paar von Atomen mit höherem Rechte als dynamisch unabhängiges System angesehen werden kann, als ein einzelnes Atom. In der Tat gehen ja bei Stößen in verdünnten Gasen immer Paare von Geschwindigkeiten (vektoriell verstanden) in andere Paare über. Es muß aber ausdrücklich betont werden, daß auch ein Ansatz von der Form

$$(77) \quad dN_{12} = \Phi(\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1) d\xi d\eta d\zeta d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$$

nur eine Approximation darstellt, die nur dann zulässig ist, wenn das Gas so verdünnt ist, daß ausschließlich binäre Stöße berücksichtigt zu werden brauchen. Im allgemeinsten Falle muß als unabhängiges Wahrscheinlichkeitselement das Auftreten eines Zustandes gelten, bei dem sämtliche Koordinaten und Geschwindigkeiten des betrachteten Systems vorgeschriebene — natürlich mit den Bedingungen des Systems verträgliche — Werte haben. Es mag im übrigen betont werden, daß der „Paaransatz“ keineswegs wesentlich für unsere Betrachtungen ist. Der Ansatz (74) liefert auch eine stationäre Verteilung, wenn man eine Gesamtheit von Systemen be-

1) S. H. Burbury, Phil. Mag. . (5) 50. S. 584. 1900.

trachtet und unter dN_{12} die Zahl derjenigen Systeme versteht, deren sämtliche Koordinaten und Geschwindigkeiten in einer gegebenen Zelle des Gesamtphasenraumes liegen. Man muß dann nur unter $d\omega$ diese Zelle, unter E die Systemenergie und unter I die Summe sämtlicher binärer Invarianten von der Form (67) verstehen. Wesentlich für unsere Betrachtungen ist dagegen die Beschränkung auf *binäre* Invarianten, und dafür ist der Paaransatz ein bequemer Ausdruck.

Der Ansatz (75) liefert für die beiden Atomsorten verschiedene mittlere lebendige Kräfte. Man findet nämlich

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} &= \frac{1}{2\alpha} \frac{1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_2}{1 + \frac{2\beta'}{\alpha} (m_1 + m_2)}, \\ \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} &= \frac{1}{2\alpha} \frac{1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_1}{1 + \frac{2\beta'}{\alpha} (m_1 + m_2)}, \end{aligned} \right.$$

und der Gleichverteilungssatz wäre somit auch für translativ Bewegungen ungültig. Da kein Grund dafür vorliegt, eine so weit gehende Annahme zu machen, wenigstens für Temperaturen, die nicht sehr tief sind, wollen wir im folgenden annehmen, daß β'/α eine endliche Konstante und

$$(79) \quad \frac{2\beta'}{\alpha} (m_1 + m_2) \ll 1$$

ist. Dadurch reduziert sich (75) auf das Maxwellsche Gesetz und die Konstantenbestimmung (85) bleibt bestehen.

Unter der Annahme (79) vereinfacht sich das Verteilungsgesetz (74) zu¹⁾

$$(80) \quad dN_{12} = C' e^{-\alpha \left(\frac{m_1 v^2}{2} \Delta^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 \right) - \beta' m_1 v^2 \Delta^2} AdAd\dot{x}_2.$$

Durch die Anwesenheit der Atome m_1 wird also dann das Maxwellsche Verteilungsgesetz der freien Atome nicht gestört.

Es bleiben nun noch die Energiemittelwerte zu berechnen. Dazu ist zu bemerken, daß die Berechnung nicht durchführbar

1) In einem Häufigkeitsgesetz von der Form $x e^{-p x^2 - 2q x} dx$ ($0 < x < \infty$) kann der Exponent $2q x$ neben $p x^2$ vernachlässigt werden, wenn $2q \bar{x} \ll p \bar{x}^2$ ist, und das führt zur Bedingung $q \ll p^{1/2}$.

ist, solange nicht τ als Funktion der Zustandsvariablen bekannt ist. Entsprechend dem orientierenden Charakter der vorliegenden Rechnungen wollen wir für τ seinen Mittelwert gesetzt denken, d. h. also annehmen, daß τ nur Funktion der absoluten Temperatur sei.

Indem man zuerst nach x_2 , dann nach A und schließlich nach ϑ integriert, findet man aus (74)

$$(81) \quad \left\{ \int dN_{12} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \pi^{3/2} C}{\alpha^{1/2} m_1 \nu^3 m_2^{1/2}} \left(1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_1 \chi^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\ \left. \cdot \left(1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_2 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_1 \chi^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \right.$$

$$(82) \quad \overline{E}_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_2 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_1 \chi^2 + \frac{2\beta'^2}{\alpha^2} m_1 m_2 \chi^2}{\left(1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_1 \chi^2 \right) \left(1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_2 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_1 \chi^2 \right)},$$

$$(83) \quad \frac{\overline{m_2 \dot{x}_2^2}}{2} = \frac{1}{2\alpha} \frac{1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_1 \chi^2}{1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_2 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_1 \chi^2}.$$

Aus den beiden letzten Formeln erkennt man, daß $\frac{\overline{m_2 \dot{x}_2^2}}{2}$ für alle Werte von $\nu \tau$ endlich bleibt und mit wachsendem $\nu \tau$ gegen $1/2\alpha$ konvergiert, während \overline{E}_1 mit wachsendem $\nu \tau$ gegen 0 strebt; und zwar gilt das, wie immer die Konstanten α und β' bestimmt werden, wenn sie nur endlich bleiben.

Insbesondere unter der Annahme (79) erhält man aus (82), (83) oder unmittelbar aus (80)

$$(84) \quad \overline{E}_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_1 \chi^2},$$

$$(85) \quad \frac{\overline{m_2 \dot{x}_2^2}}{2} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Damit ist also gezeigt, daß auf Grund des Verteilungsgesetzes (74) die mittlere Energie der linearen Oszillatoren mit unbegrenzt zunehmendem $\nu \tau$ gegen Null konvergiert, auch dann, wenn über die Konstante β' so verfügt wird, daß für freie Atome das Maxwellsche Verteilungsgesetz praktisch bestehen bleibt. Im übrigen erweist sich der Energieinhalt der Oszillatoren als Funktion von $\nu \tau$; er geht für kleine Werte von $\nu \tau$ in den Gleichverteilungswert $k T$ über, und zwar mit

derselben Annäherung, mit der die Gleichverteilung für freie Atome gilt.

Die drei Konstanten unserer Verteilungsfunktion C , α und β' sind aus den Bedingungen des Problems zu bestimmen. Wesentlich für unsere Betrachtungen ist die Annahme eines von Null verschiedenen „Koppelungsfaktors β' “; über seine Größe kann die Theorie nichts aussagen, sondern sein numerischer Betrag muß aus empirischen Daten ermittelt werden. Nehmen wir also an, unser „linearer Körper“ bestehe aus N_1 Atomen m_1 und N_2 Atomen m_2 , so muß für irgendeine Temperatur, bei der bereits Abweichung von der Gleichverteilung vorliegt, bekannt sein, wie sich die Gesamtenergie E auf den „festen“ und den „gasförmigen“ Bestandteil des Systems verteilt. Bedeuten E_1 und E_2 die betreffenden Anteile ($E = E_1 + E_2$), so bestimmen sich die drei Konstanten aus den Gleichungen

$$(86) \quad \begin{cases} N_1 N_2 = \int dN_{12}, \\ E_1 = N_1 \bar{E}_1, \\ E_2 = N_2 \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}. \end{cases}$$

In die rechten Seiten dieser Gleichungen sind streng genommen die Ausdrücke (81), (82) und (83) einzusetzen. Aus den oben (S. 653) angegebenen Gründen muß aber β' der einschränkenden Bedingung (79) genügen, und wir werden demgemäß nur solche Kraftgesetze zuzulassen haben, die unter Wahrung der Bedingung (79) Anschluß an die Erfahrung geben. Dann dürfen auch die Formeln (82) und (83) durch die einfacheren Ausdrücke (84) und (85) ersetzt werden, wobei α durch (35) bestimmt ist.

Bei der Betrachtung des Grenzfalles $\nu \tau \gg 1$ mußten wir, um der Helmholtzschen Forderung genügen zu können, die Annahme machen, daß β mit wachsendem ν über alle Grenzen wächst (S. 640, 641). Wir haben jetzt gezeigt, daß auf Grund des Ansatzes (74) der Helmholtzschen Forderung stets und ohne weitere Annahme genügt wird; unsere gegenwärtige Untersuchung beantwortet auch die Frage, in welcher Weise das früher benutzte β mit ν ins Unendliche wächst. Denn β steht

mit unserem jetzigen β' , wie ein Vergleich der Ansätze (74) und (25) zeigt, in dem Zusammenhang

$$(87) \quad \beta' = 2m_1 \chi^2 (\nu \tau) \beta.$$

Die Folgerungen über den Energieinhalt linearer Oszillatoren, die wir aus der Theorie gezogen haben, stehen in Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn man die Hypothese einführt, daß unser $\nu \tau$ mit dem $h\nu/2\pi kT$ ¹⁾ der Planckschen Formel identifiziert werden darf.²⁾ Damit wäre zugleich eine dynamische Deutung der Planckschen Konstante h gegeben; es würde sich nämlich folgern lassen, daß die Stoßdauer umgekehrt proportional der absoluten Temperatur, und das Produkt der Stoßdauer τ in die Energie $2\pi kT$ gleich dem elementaren Wirkungsquantum ist.

Wenn auch die ausgesprochene Hypothese naheliegend ist, so möchten wir sie doch nur mit allem Vorbehalt aussprechen; ihre Zulässigkeit hängt im wesentlichen davon ab, ob es gelingen wird, die hier entwickelten Gedanken auch auf anderen Anwendungsgebieten der Quantentheorie zur Deutung der Erscheinungen heranzuziehen. In diesem Zusammenhange sei nur daran erinnert, daß schon Sommerfeld³⁾ die Bremszeit der Elektronen bei der Erzeugung der Röntgenstrahlen mit Erfolg zu dem Planckschen Wirkungsquantum in Beziehung gesetzt hat.

Wir sehen davon ab, die Formeln, die sich für den Energieinhalt eines linearen Oszillators ergeben, wenn man in (84) etwa die speziellen Ansätze (70) oder (72) einführt, mit dem Planckschen Gesetz zu vergleichen; denn die Kraftgesetze (69) und (71), die zu (70) und (72) führen, sind völlig willkürlich. Man kann umgekehrt die Frage aufwerfen, wie die Funktion $\chi(\nu \tau)$ bestimmt werden müßte, und welche Form des Schwerpunktsintegrals (65) danach anzunehmen wäre, damit für den Energieinhalt des Oszillators die Plancksche Formel resultiert.

1) Man vgl. die Anmerkung auf S. 632.

2) Etwas allgemeiner wäre die Annahme, daß die beiden dimensionslosen Zahlen $\nu \tau$ und $h\nu/2\pi kT$ sich nur um einen numerischen Faktor von der Größenordnung 1 unterscheiden. Wegen der Unbestimmtheit, die schon der Erklärung von τ anhaftet, sehen wir von der Einführung eines solchen Faktors ab.

3) A. Sommerfeld, Sitzungsber. d. kgl. Bayr. Akad. 1911. S. 1.

Da unsere Formel (84) für $\nu \tau = 0$ nicht gegen $1/\alpha = k T$ konvergiert, sondern gegen den nur wenig davon verschiedenen Wert

$$\frac{k T}{1 + \frac{2\beta'}{\alpha} m_1},$$

muß gefordert werden

$$(88) \quad \frac{1}{1 + \varepsilon \chi^2(z)} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{z}{e^z - 1},$$

wenn

$$(89) \quad \nu \tau = \frac{h \nu}{2 \pi k T} = z, \quad \frac{2\beta'}{\alpha} m_1 = \varepsilon$$

gesetzt wird. Daraus ergibt sich

$$(90) \quad \chi^2(z) = \frac{(e^z - 1)(1 + \varepsilon) - z}{\varepsilon z}.$$

Das so bestimmte $\chi(z)$ konvergiert für $z = 0$ gegen 1 und für $z = \infty$ gegen ∞ , wie es sein muß. Die Funktion $\chi(z)$ läßt sich demnach in der gewünschten Weise ermitteln, wie immer ε vorgeschrieben wird, also auch wenn ε eine kleine Zahl ist, wie es für die Gültigkeit von (84) erforderlich war.

Wenn $\chi(z)$ bekannt ist, läßt sich die Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Stoßkraft auf eine Quadratur zurückführen. Denn die Gleichung (59) stellt bei gegebenem $\chi(z)$ eine Integralgleichung für $g(s)$ dar, deren Lösung nach dem Fourierschen Theorem durch

$$(91) \quad g(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \chi^{-1}(z) \cos(s z) dz$$

gegeben ist.¹⁾ Wir möchten aber auf die so gekennzeichnete Bestimmung von $\chi(z)$ und $g(s)$ keinen sonderlichen Wert legen, weil man auch aus der Kenntnis von $g(s) = g\left(\frac{t}{\tau}\right)$ noch keinen Rückschluß auf die beim Stoß wirkenden Kräfte als Funktion des Abstandes der stoßenden Teilchen ziehen kann.²⁾ Es müßte

1) Man vgl. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bd. I. § 19. Braunschweig 1910.

2) Es ist auch darauf hinzuweisen, daß das angegebene Verfahren nur dann zu einer eindeutigen Bestimmung von $\chi(z)$ führt, wenn an der Forderung festgehalten wird, daß β'/α eine Konstante sein soll (vgl. S. 653). Andererseits braucht es nicht zu befremden, daß dieser Quotient in die

vielmehr gezeigt werden, daß man aus plausiblen Annahmen über die Wirkungsweise der Kräfte zu einer Funktion $\chi(z)$ gelangen kann, die sich nicht merklich von (90) unterscheidet.

Wesentlich scheint uns dagegen der Nachweis, daß der Energieinhalt eines Oszillators Funktion von $\nu\tau$ ist. Macht man die schon oben ausgesprochene Annahme, daß $\nu\tau$ mit $h\nu/2\pi kT$ identifiziert werden darf, so wird die Stoßdauer, wie auch bereits erwähnt, umgekehrt proportional mit der absoluten Temperatur. Hält man diese Folgerung mit der früher (S. 645) angegebenen Schätzung der Stoßdauer zusammen, so sind die beiden Werte nur vereinbar, wenn man $n = 3$ setzt, d. h. also, wenn man annimmt, daß die Stoßkräfte umgekehrt proportional mit dem Kubus der Entfernung abnehmen. Eine solche Folgerung ist einigermaßen überraschend, da man Grund zu der Annahme hat, daß die Abnahme der beim Stoß wirksamen Kräfte mit der Entfernung sehr viel schneller erfolgt. Demgegenüber möchten wir betonen, daß einerseits die Schätzung der Stoßdauer auf S. 645 auf sehr vereinfachten Annahmen und einer einigermaßen willkürlichen Definition des Begriffs der Stoßdauer beruht; andererseits ist für das τ vielleicht nur die mittlere Phase des Stoßvorganges maßgebend, bei der die Kräfte am stärksten sind. Während der größten Annäherung zweier stoßender Moleküle ist aber ein Kraftgesetz mit $n = 3$ durchaus nicht unmöglich, zumal wenn man an einen elektrischen Ursprung dieser Kräfte denkt.¹⁾

Für den Zahlenwert der Stoßdauer erhält man aus der Gleichsetzung von $\nu\tau$ und $h\nu/2\pi kT$ die Aussage

$$(92) \quad \tau = 7,59 \cdot 10^{-12} T^{-1} \text{ sec.}$$

Von den mit dieser Formel berechneten Stoßzeiten läßt sich nur so viel sagen, daß sie mit den Forderungen der kinetischen Gastheorie nicht im Widerspruch stehen. Für $T = 273$ ergibt sich $\tau = 2,78 \cdot 10^{-14}$; dagegen ist z. B. die Zeit, die zwischen zwei Stößen vergeht, in Sauerstoff bei Normalumständen $\tau' = 1,65 \cdot 10^{-10}$. Erstere Zahl ist klein gegen letztere, wie es die Gastheorie für ihre Gültigkeit voraussetzt;

Bestimmung von $\chi(z)$, und damit von $g(s)$ eingeht [vgl. Formel (90)]; denn diese Funktionen stellen nach der Art, wie sie eingeführt sind, nur einen gewissen *mittleren* Funktionsverlauf dar.

1) P. Debye, Physik. Zeitschr. 22. S. 302. 1921.

erst bei außerordentlich niedrigen Temperaturen würde das nicht mehr zutreffen.

Zum Schluß möchten wir nochmals betonen, daß alle von uns aufgestellten Häufigkeitsansätze nur hinreichende Bedingungen für Stationarität des Zustandes darstellen. Wir glauben aber den Beweis erbracht zu haben, daß es mit den allgemein anerkannten und gebrauchten Prinzipien der klassischen statistischen Mechanik möglich ist, Abweichungen von der Gleichverteilung und das Absinken des Energieinhalts der Oszillatoren auf Null zu erklären.

Mit dem Gleichverteilungssatz fällt natürlich auch die oft ausgesprochene Folgerung, daß die statistische Mechanik mit Notwendigkeit zum Rayleighschen Strahlungsgesetz führt. Macht man, wie wir es getan haben, die Hypothese, daß die Stoßdauer umgekehrt proportional der absoluten Temperatur ist, und kombiniert unseren Ausdruck (84) mit der Planckschen Formel, die den Energieinhalt eines monochromatischen Oszillators mit der Strahlungsdichte im umgebenden stationären Strahlungsfelde in Beziehung setzt, so gelangt man in bekannter Weise zu einer Strahlungsformel. Die so gewonnene Strahlungsformel steht unter allen Umständen mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz im Einklang und unterscheidet sich insbesondere beliebig wenig vom Planckschen Strahlungsgesetz, wenn man die Funktion $\chi(\nu\tau)$ aus der Gleichung (90) bestimmt.

Zusammenfassung.

§ 1. Es wird das statistische Gleichgewicht zwischen frei beweglichen und elastisch an Ruhelagen gebundenen Atomen behandelt, und zwar für den Grenzfall, daß die Eigenschwingungsdauer klein ist gegen die Stoßdauer. Die Untersuchung geht auf die Mechanik des Stoßes zwischen einem freien und einem gebundenen Atom zurück, und es wird für den betrachteten Grenzfall eine Bewegungsinvariante gewonnen. Unter Berücksichtigung dieser Bewegungsinvariante neben der Energie wird eine stationäre Zustandsverteilung aufgestellt. Die so gewonnene Verteilung widerspricht dem Gleichverteilungssatze und läßt sich mit der Forderung in Einklang bringen, daß der Energieinhalt der Oszillatoren mit zunehmender Frequenz gegen Null konvergieren muß.

§ 2. In derselben Weise wird das statistische Gleichgewicht zwischen freien Atomen und Rotatoren in einer Ebene behandelt, wiederum unter Beschränkung auf den Fall, daß die Umdrehungsdauer klein ist gegen die Stoßdauer. Eine Abschätzung der letzteren zeigt, daß diese Voraussetzung für hinreichend tiefe Temperaturen zutrifft. In diesem Gebiete gilt der Gleichverteilungssatz nicht, und die Existenz einer Nullpunktsenergie ist mit der Theorie vereinbar.

§ 3. Die Bedingungen des ersten Paragraphen werden durch die Annahme vereinfacht, daß die Stoßkräfte explizit als Funktion der Zeit gegeben, und daß alle Bewegungen auf eine Koordinatenrichtung beschränkt sein sollen („linearer Körper“). Unter diesen Vereinfachungen läßt sich die Aufgabe für beliebige Werte der Schwingungsfrequenz $2\pi\nu$ und der Stoßzeit τ behandeln. Es wird ein stationäres Verteilungsgesetz gewonnen, demzufolge der Energieinhalt der linearen Oszillatoren mit unbegrenzt wachsendem $\nu\tau$ gegen 0 konvergiert. Unter der Annahme, daß $\nu\tau$ mit dem $h\nu/2\pi kT$ der Planckschen Formel identifiziert werden darf, läßt sich eine unbestimmt gebliebene, durch den zeitlichen Verlauf der Stoßkräfte bedingte Funktion so bestimmen, daß sich die Plancksche Formel für den Energieinhalt der Oszillatoren und damit für das Strahlungsgesetz mit beliebiger Annäherung ergibt.

Leipzig, im Februar 1924.

(Eingegangen 27. Februar 1924.)

3. *Beugungsfransen an Spaltaufnahmen mit Röntgenstrahlen; von B. Walter.¹⁾*

(Dem Andenken C. H. Winds gewidmet.)

(Hierzu Tafel I u. II.)

Wenn auch die Wellennatur der Röntgenstrahlen heute als sicher bewiesen angesehen werden kann, so ist es doch aus mehreren Gründen erwünscht, die früher im Interesse des Nachweises jener Natur — zumal von C. H. Wind — soviel gesuchte Tatsache, daß die Strahlen ebenso wie diejenigen des gewöhnlichen Lichtes auch beim Durchgang durch einen einfachen Spalt eine Beugung erfahren, auch jetzt noch festzustellen; vor allem, um auch auf diesem direktesten Wege die absolute Größe der Wellenlänge eines bestimmten Röntgenstrahls und damit zugleich auch die absolute Größe der damit zusammenhängenden Konstanten der Atomphysik sicher zu stellen.

Die unmittelbarste und sicherste Art nun, die Beugung einer Strahlung mit einem einfachen Spalt nachzuweisen, ist offenbar die, ein Bild dieses Spaltes *mit Beugungsfransen*, d. h. mit Intensitätsmaximis und -minimis neben dem eigentlichen Spaltbild, herzustellen; und dieses Ziel glaube ich nun mit den dieser Abhandlung beigegebenen Spaltaufnahmen, wenn auch noch in sehr unvollkommener, so doch in m. E. durchaus überzeugender Weise erreicht zu haben.

Zu den Versuchen diene, soweit die Spalte in Frage kommen, die gleiche Apparatur, wie sie bereits vor 15 Jahren

1) Den größten Teil des Inhaltes der vorliegenden Abhandlung habe ich bereits am 10. Februar d. J. auf der Tagung des Niedersächsischen Gauvereins der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Braunschweig vorgetragen; inzwischen sind aber noch einige Tatsachen hinzugekommen, welche meine damals noch etwas unsichere Auffassung der in meinen Beugungsaufnahmen in Frage kommenden Erscheinungen m. E. über allen Zweifel erhoben haben.

zu den analogen Versuchen von R. Pohl und mir¹⁾ benutzt wurde; d. h. von den Strahlen der Röntgenröhre wird zunächst durch einen vertikalen Spalt von etwa 6μ Weite ein sehr schmales Bündel ausgeblendet, das zur Abbildung eines in etwa 75 cm Abstand von dem Spalt aufgestellten, damit parallelen zweiten Spaltes dient, der also den eigentlichen Beugungsspalt darstellt. Sein Querschnitt hatte bei diesen Versuchen stets die Form eines Keiles, der sich bei meinen hier zu beschreibenden neueren Aufnahmen von einer oberen Weite von etwa 40μ auf eine Länge von etwa 18 mm nach unten hin bis zu vollständigem Schlusse verjüngte.

Hinsichtlich des Aussehens sowie auch der Ausrichtung der beiden Spalte muß ich auf die genannte Abhandlung verweisen.

Die photographische Platte, auf welcher der Beugungsspalt abgebildet wurde, befand sich wieder wie früher in ebenfalls 75 cm Abstand hinter diesem Spalt. Es wurden stets Hauffsche Ultrarapidplatten benutzt, die in ziemlich viel gebrauchter Hydrochinonmethollösung solange entwickelt wurden, bis in ihren nicht belichteten Teilen im roten Licht der Dunkelkammer deutlich die ersten Spuren des Schleiers zu erkennen waren. Ich führe dies an, weil nach meinen Beobachtungen der Grad der Entwicklung der Platte für die möglichst deutliche Hervorufung des gesuchten Phänomens von ziemlicher Bedeutung zu sein scheint.

Ein grundlegender Unterschied zwischen meinen neueren Beugungsversuchen und den älteren bestand nun aber in der Art der angewandten Röntgenröhre. Es ist nämlich klar, daß man zur Erzielung möglichst deutlicher Beugungsfransen mit einer möglichst monochromatischen Strahlung arbeiten muß. Die früher benutzten Röhren, in denen die Antikathode aus Platin bestand, genügten nun dieser Bedingung in der denkbar schlechtesten Weise, da das K-Linienspektrum dieses Metalls bei den zum Betriebe dieser Röhren benutzten Spannungen noch nicht angeregt wurde, das hierbei angeregte L-Spektrum aber wieder eine so weiche Strahlung darstellt, daß sie zum

1) B. Walter u. R. Pohl, *Ann. d. Phys.* **29**. S. 331. 1909 (vgl. besonders die Figg. 1, 2 und 3 daselbst).

größten Teil von der Glaswand der Röhre absorbiert wurde — abgesehen davon, daß dieses Spektrum selbst aus einer größeren Zahl von Linien mit so verschiedener Wellenlänge besteht, daß hier schon deswegen von einer monochromatischen Strahlung keine Rede mehr sein kann. Die Strahlung jener Röhren bestand daher in der Hauptsache aus dem von ihnen ausgesandten kontinuierlichen Spektrum, d. h. aus einem Gemisch der sämtlichen Wellenlängen von der Anregungsgrenze bis etwa zur Bromabsorptionsgrenze hin, also von etwa $0,2$ bis $0,92 \cdot 10^{-8}$ cm; und zwar in einer Intensitätsverteilung, wie sie annähernd auch in dem kontinuierlichen Spektrum der sogleich näher zu erörternden Fig. 1 der Taf. I auftritt. Von allen diesen Wellen wirkte also derjenige Teil, welcher zwischen der Anregungsgrenze und der Silberabsorptionsgrenze ($\lambda = 0,485 \cdot 10^{-8}$ cm) liegt, — wegen der bekannten selektiven Absorption, welche die Silberatome der photographischen Schicht auf diese Strahlen ausüben — ganz erheblich viel kräftiger als der Teil mit längeren Wellen, so daß man daher auch sagen kann, daß der Durchschnittswert der bei den früheren Beugungsversuchen hauptsächlich wirksamen Wellenlängen etwa $0,35 \cdot 10^{-8}$ cm betrug. Ich erwähne dies, weil A. Sommerfeld¹⁾ bei seiner bekannten, auf die photometrische Ausmessung einer unserer älteren Beugungsaufnahmen durch P. P. Koch²⁾ gegründeten ausführlichen theoretischen Untersuchung für die wirksame Wellenlänge bei jener Aufnahme eine der obigen sehr naheliegende Größe, nämlich $0,4 \cdot 10^{-8}$ cm, d. h. tatsächlich die richtige Größenordnung gefunden hat. Immerhin ist aber eine derartige Untersuchung sehr umständlich; und es ist daher schon aus diesem Grunde die Herstellung von Spaltaufnahmen mit Beugungsfransen in höchstem Grade wünschenswert.

Zur Erzielung derartiger Aufnahmen benutzte ich nun zunächst eine Röntgenröhre mit *Molybdänantikathode*³⁾, da dieses

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 38. S. 473. 1912.

2) P. P. Koch, ebenda S. 507.

3) Die Röntgenröhrenfabrik von C. H. F. Müller, Hamburg, hatte die große Freundlichkeit, uns sowohl von dieser wie auch von der später noch zu beschreibenden Röhrenart mit Kupferantikathode sogar mehrere Exemplare gratis zu liefern, wofür ich derselben auch hier unsern besten Dank sagen möchte.

Metall, wie das in der Fig. 1, Taf. I, dargestellte Spektrum der Röhre zeigt, neben dem bereits beschriebenen kontinuierlichen Spektrum ein sehr starkes und auch für diese Verhältnisse genügend monochromatisches Linienspektrum ($\lambda_\alpha = 0,71 \cdot 10^{-8}$ cm, $\lambda_\beta = 0,63 \cdot 10^{-8}$ cm) aussendet, dessen Strahlen ferner auch noch ein so großes Durchdringungsvermögen haben, daß man hierbei eine von der Pumpe abgeschmolzene Röhre mit gewöhnlicher Glaswand benutzen kann.

An den mit einer solchen Röhre hergestellten Spaltaufnahmen konnte ich nun aber gegenüber unseren älteren Aufnahmen unter dem Mikroskop keine Unterschiede erkennen; und so beschloß ich, zu größeren Wellenlängen überzugehen. Hier kam nun zunächst eine Röhre mit *Kupferantikathode* in Betracht, deren Linienspektrum hauptsächlich aus den Strahlen $\lambda_\alpha = 1,54 \cdot 10^{-8}$ cm und $\lambda_\beta = 1,39 \cdot 10^{-8}$ cm besteht und also bereits mehr als die doppelte Wellenlänge von dem des Molybdäns besitzt. Dieses Kupferspektrum stellt nun jedoch schon eine so weiche Strahlung dar, daß zunächst die Glaswand der Röhre hierbei mit einem Fenster aus einem durchlässigeren Material versehen werden muß, als welches *Lindemannglas* gewählt wurde. Diese Substanz läßt sich nämlich mit dem Röhrenglas verschmelzen, so daß auch diese Röhren nach Herstellung des richtigen Vakuums von der Pumpe abgeschmolzen werden können. Sämtliche Röhren waren nach dem Coolidgetypus gebaut, und ihr aus Wolfram bestehender Kathodenglühdraht hatte die Form einer linearen Spirale, die von einer kastenartigen „Sammelvorrichtung“ aus Nickelblech umgeben war (Modell „Media“ der genannten Röhrenfabrik). Die Antikathoden der Röhren waren in bekannter Weise zu einem Wassergefäß ausgebildet und es konnte deshalb u. a. auch aus der Menge des hierin verkochten Wassers ein ziemlich guter Rückschluß auf die geleistete Röntgenenergie gemacht werden.

Die Röhre befand sich während der Aufnahme in einer größeren Kiste aus Bleigummi, die sich in Höhen- und Seitenrichtungen bequem verstellen ließ und nach der Seite der Spalte zu eine beliebig weit zu schließende viereckige Öffnung hatte, die aus zwei gegeneinander verstellbaren Paaren von 4 mm dicken Bleiplatten bestand. Der Betrieb der Röhre erfolgte

mit Hochspannungsgleichrichter, die Heizung ihres Kathodenglähdrahtes durch einen Heiztransformator.

Die Anwendung einer Röhre mit Kupferantikathode hatte nun gegenüber der mit Molybdän außer der mehr als doppelt so großen Wellenlänge ihres Linienspektrums für unseren Zweck noch den weiteren Vorteil, daß zur genügend starken Anregung dieses Spektrums die Spannung so niedrig genommen werden konnte, daß dabei derjenige Teil des kontinuierlichen Spektrums, dessen Wellenlängen kürzer als die der Silberabsorptionsgrenze sind, und der, wie wir gesehen haben, dann stets den stärksten Teil des kontinuierlichen Spektrums bildet, überhaupt nicht mehr angeregt wurde. Ein solches Spektrum meiner Cu-Röhre, das also in dem kurzwelligen Teile seines kontinuierlichen Spektrums kurz vor der Silberbandkante abbricht, ist in der Fig. 2, I der Taf. I dargestellt; und man sieht nun tatsächlich, daß hier das kontinuierliche Spektrum im Vergleich zu dem Linienspektrum schon erheblich mehr zurücktritt als in dem Molybdänspektrum der Fig. 1 der Taf. I.

In noch etwas höherem Maße erreicht man dieses Ziel ferner dadurch, daß man irgendwo in den Gang der Strahlen ein dünnes *Nickelblech* einschaltet, eine Maßregel, die übrigens noch den zweiten Vorteil mit sich bringt, daß dadurch, wie das Spektrum II der Fig. 2, Taf. I, zeigt, zugleich auch die β -Linie des Cu-Linienspektrums ganz erheblich viel stärker geschwächt wird als die α -Linie desselben, so daß man also auf diese Weise ein fast streng monochromatisches Strahlenbündel erhält. Die Erklärung dieses übrigens bereits mehrfach angewandten Kunstgriffs ist bekanntlich die, daß die Absorptionsgrenze des Nickels zwischen den beiden genannten Cu-Linien liegt und daher die kurzwelligere von ihnen in dem Blech die Eigenstrahlung desselben anregt, die langwelligere aber nicht, die erstere also erheblich stärker absorbiert wird als die letztere. Die Dicke des Nickelblechs betrug bei meinen Versuchen rund 0,01 mm.

Mit der dem Spektrum II der Fig. 2 der Taf. I entsprechenden Strahlung wurden nun meine sämtlichen neueren Beugungsaufnahmen gemacht, d. h. es handelte sich also hierbei im wesentlichen um die Wellenlänge $\lambda = 1,54 \cdot 10^{-8}$ cm der K_{α} -Linie des Cu, oder genauer um ein Gemisch der K_{α} -Linie ($\lambda = 1,537 \cdot 10^{-8}$ cm)

und der etwas schwächeren K_{α}' -Linie ($\lambda = 1,541 \cdot 10^{-8}$ cm) dieses Metalls.

Eine derartige weiche Strahlung würde nun aber, wenn man sie wie bei den früheren Beugungsversuchen ohne weiteres durch die Spalte hätte schicken wollen, in der dabei zu durchsetzenden Luftstrecke von über 150 cm Länge eine sehr beträchtliche Absorption erfahren haben — nach den Absorptionsformeln von Glocker¹⁾ beträgt z. B. für einen Weg von 140 cm Länge in einem Gasgemisch von der Zusammensetzung der atmosphärischen Luft die von der Strahlung $\lambda = 1,54 \cdot 10^{-8}$ cm durchgelassene Intensität nur etwa 13 Proz. der auffallenden —, so daß es daher sehr wünschenswert erschien, hierbei die Luft nach Möglichkeit aus dem Strahlengang zu entfernen. Dies hätte sich z. B. dadurch erreichen lassen, daß man die ganze Eisenschiene, auf der die beiden Spalten s_1 und s_2 , sowie auch die photographische Platte befestigt werden (vgl. die Fig. 1 der angeführten Abhandlung von Walter und Pohl) in ein zu evakuierendes Gefäß brachte; wesentlich einfacher war jedoch der von mir zu diesem Zweck eingeschlagene Weg, der darin bestand, sowohl zwischen den beiden Spalten s_1 und s_2 , wie auch zwischen s_2 und der photographischen Platte je eine evakuierte Röhre von etwa 70 cm Länge einzuschalten, deren jede beiderseits mit einem für Röntgenstrahlen leicht durchlässigem Fenster versehen war. Die Röhren hatten etwa 5 cm inneren Durchmesser, bestanden aus Glas und waren an ihren Enden mit nach außen umgebogenen Wülsten versehen, welche abgeschliffen wurden, und auf welche dann mit Pizein je eine Messingplatte aufgekittet wurde, in die eine Öffnung von etwa 5 cm Höhe und 0,5 cm Breite eingeschnitten war. Auf diese Öffnungen wurden dann ebenfalls mit Pizein 0,11 mm dicke Zelluloidfolien aufgekittet. Die beiden Vakuumröhren waren ferner mit je einem seitlichen Ansatzrohr versehen, das zur Verbindung mit der Luftpumpe diente und einen Hahn zum Absperren, sowie eine kleine Geißlersche Röhre zur Prüfung des Vakuums trug.

Die Röhren wurden vor Beginn der Versuche auf Kathodenstrahlenvakuum evakuiert, ihre Luftleere ging aber stets schon innerhalb 24 Stunden auf Geißlersches Vakuum zurück und

1) R. Glocker, Physikal. Zeitschr. 19. S. 66. 1918.

hielt sich dann monatelang anscheinend unverändert in diesem Stadium, ein Beweis, daß die Gasentwicklung in den Röhren nicht etwa von einer Undichtigkeit der Kittungen herrührte. Sie dürfte vielmehr aus dem Zelluloid der Fenster stammen. Auch die Farbe des Lichtes der Prüfröhren beim Durchgang der Ströme eines kleinen Induktors sprach in diesem Sinne.

Um aber ferner auf alle Fälle den Mindestgewinn an Strahlungsenergie, der durch die Einschaltung der beiden Röhren in den Strahlungsgang erreicht wurde, festzustellen, wurde damit — etwa zwei Monate nach ihrem letzten Evakuieren — unter Benutzung der in Frage kommenden Cu-Strahlung zunächst eine Aufnahme des Beugungsspaltes und seiner Umgebung mit bestimmter Expositionszeit gemacht; dann wurden die beiden Röhren entfernt und nun auf der gleichen Platte dasselbe Objekt unter Anwendung verschiedener, passend abgestufter Expositionszeiten mehrmals nebeneinander aufgenommen. Auf der fertig entwickelten Platte wurde dann die Schwärzung einer bestimmten Stelle des aufgenommenen Objekts in den verschiedenen Aufnahmen mit dem Registrierphotometer verglichen. Dabei ergab sich, daß die Expositionszeiten, welche man zur Erreichung der gleichen Plattenschwärzung mit den beiden Vakuumröhren einerseits und ohne sie andererseits nötig hatte, sich wie 1 : 1,63 verhielten, so daß also durch die Anwendung der Röhren immerhin ein erheblicher Gewinn an Schwärzung erreicht wurde, wenn auch freilich lange nicht in dem Maße, wie ich erwartet hatte, so daß ich in Zukunft ein anderes Fenstermaterial als Zelluloid zu verwenden gedenke. Meine bisherigen, nunmehr näher zu beschreibenden Beugungsaufnahmen mit der genannten Cu-Strahlung sind jedoch noch sämtlich mit Benutzung der beiden soeben beschriebenen Vakuumröhren hergestellt, so daß also die Strahlung dabei außer dem Lindemannglasfenster der Röntgenröhre und der Nickelfolie von 0,01 mm Dicke auch noch die vier Zelluloidfolien der beiden Vakuumröhren zu durchsetzen hatte, von denen die erste sich dicht hinter dem ersten Spalt, die zweite in einigen Zentimeter Abstand vor dem zweiten, die dritte dicht hinter diesem und die vierte endlich in einigen Zentimeter Abstand vor der photographischen Platte befand. Diese war ferner in eine doppelte Lage schwarzen Papiers eingehüllt. Die von den Strahlen

außerdem noch zu durchquerende Luftstrecke hatte eine Länge von im ganzen 19 cm, wovon 9 cm auf den Raum zwischen dem Fenster der Röntgenröhre und dem ersten Spalt, 5 cm auf den zwischen diesem und dem zweiten Spalt und 5 cm auf den zwischen diesem und der photographischen Platte fielen.

Schon die erste meiner derartigen Beugungsaufnahmen nun, die bei einer Belastung der Röhre mit etwa 25 000 Volt Maximalspannung (aus der Grenzwellenlänge des Spektrums der Fig. 2, I Taf. I nach der Einsteinschen Formel berechnet) und 20 Milliampere Strom 7 Stunden dauerte, und bei der aus dem Antikathodengefäß der Röhre ungefähr 4 l Wasser verkocht wurden, zeigte unter dem Mikroskop an einer bestimmten Stelle des Bildes des Beugungsspaltes, da wo dieser eine Weite von 4–5 μ hatte, auf der einen Seite schwache Andeutungen eines vom dem Hauptbilde deutlich abgesetzten Streifens, der nach seinem ganzen Verlauf sehr wohl als eine Beugungsfranse aufgefaßt werden konnte, zumal da sonst auf der ganzen Länge des Spaltbildes nichts derartiges an demselben zu sehen war. Eine Wiederholung der Aufnahme mit 12stündiger Expositionszeit (verkochte Wassermenge 7 l) und etwas anderer Einstellung der Vakuumröhren, aber unter sonst gleichen Bedingungen, ergab die gleichen Erscheinungen mit wesentlich größerer Deutlichkeit, während bei einer 30stündigen Exposition (verkochte Wassermenge 18 l) das Hauptbild sich an der genannten Stelle nach den Seiten hin schon so stark verbreiterte, daß die Streifen hier wieder undeutlicher wurden. Dafür zeigten sich aber wieder in dieser letzten Aufnahme an einer Stelle des Spaltbildes, die einer etwas weiter nach unten, d. h. nach der spitzen Seite des Beugungsspaltes zu gelegenen Stelle dieses Spaltes entsprach, deutliche Anzeichen von Beugung, wie ja auch nach der Theorie zu erwarten war.

Auf der Taf. II ist deswegen außer den in den Figg. 1–3 dargestellten sich aneinanderreihenden drei Abschnitten des Spaltbildes der zweiten der drei genannten Aufnahmen in Fig. 4 auch noch derselbe Abschnitt wie in Fig. 3 nochmals dargestellt, der aber hier aus der zuletzt erwähnten, 30stündigen Aufnahme stammt. Die vier Figuren sind durch Mikrophotographie der betreffenden Teile der genannten Aufnahmen gewonnen und stellen 76fache Vergrößerungen dieser Teile dar,

d. h. fast die gleiche Vergrößerung wie die in der Taf. VI der genannten Abhandlung von Pohl und mir wiedergegebenen Bilder, mit denen sie also unmittelbar verglichen werden können. Es kommen jedoch hierfür nur die beiden, in den Fig. 3 und 4 unserer damaligen Tafel dargestellten Abschnitte des Beugungsbildes in Frage, wie aus den über den Figuren angegebenen Werten der entsprechenden Weite s_2 des Beugungsspaltess hervorgeht.

Aus diesem Vergleich ersieht man nun zunächst, daß bei meinen neueren Aufnahmen die Schwärzung in dem mittleren Hauptstreifen ganz außerordentlich viel größer ist als an den entsprechenden Stellen unserer älteren, was natürlich einerseits auf die größere Expositionszeit bei den neueren Aufnahmen und andernteils vor allem auf die wesentlich höhere Belastungsmöglichkeit der modernen Röhren zurückzuführen ist, wie am besten daraus hervorgeht, daß bei der in unserer älteren angeführten Abhandlung in Frage kommenden Aufnahme während der siebenstündigen Expositionszeit aus dem Antikathodengefäß der Röhre nur 470 ccm, bei der in den Fig. 1—3 meiner jetzigen Taf. II z. T. wiedergegebenen dagegen in 12 Stunden ungefähr 7 l Wasser verkocht wurden.

Eine so starke Schwärzung des Mittelstreifens der Aufnahme, wie sie die neueren Bilder zeigen, ist nun aber auch nötig, wenn man auf das Auftreten von Beugungsfransen neben jenem Streifen rechnen will; denn nach der Fresnelschen Theorie beträgt die Intensität im ersten Beugungsmaximum nur 4,5 Proz. und die im zweiten sogar nur 1,6 Proz. von der im Mittelstreifen.

Was nun aber die gesuchten Beugungsfransen in den in der Taf. II dargestellten Abschnitten meiner in Rede stehenden Aufnahme anbetrifft, so sieht man schon beim einfachen Draufblicken auf die vor einem auf dem Tische liegenden Figuren, daß sich zunächst in der Fig. 1 zumal auf der rechten Seite des Mittelstreifens von diesem von oben nach unten zu allmählich ein Streifen abzulösen beginnt, der dann in der sich daran anschließenden Fig. 2 ganz deutlich als gesonderter Streifen neben dem Hauptbilde daherläuft, um sich in der einem noch engeren Teil des Beugungsspaltess entsprechenden Fig. 3 noch weiter vom Hauptbilde zu entfernen und sich

hier allmählich in dem Plattenschleier zu verlieren: das letztere offenbar, weil hier die Intensität der durch den immer enger werdenden Beugungsspalt hindurchgedrungenen Strahlung schon zu gering wurde. In der mit $2\frac{1}{2}$ facher Expositionszeit hergestellten, in Fig. 4 der Tafel wiedergegebenen Aufnahme desselben Teiles des Spaltes, sieht man nämlich den Streifen an dieser Stelle wieder deutlicher als in Fig. 3, wie man besonders



Fig. 1.

dann erkennt, wenn man die Figuren in der in der nebenstehenden Textfig. 1 dargestellten Weise betrachtet, d. h. also in der Richtung des Mittelstreifens möglichst schräg über das betreffende Bild hinwegsieht und dabei die Tafel so hält, daß hinter dem Bilde in der Blickrichtung ein dunkler Hintergrund liegt, da sonst der vom Papier zurückgeworfene Glanz stört.

Diese Betrachtungsweise der Bilder empfiehlt sich nun aber besonders auch für die beiden Figg. 1 u. 2 der Taf. II; denn einesteils tritt dann der Verlauf des oben beschriebenen Beugungsstreifens derselben noch mit viel größerer Deutlichkeit hervor; vor allem aber deswegen, weil man nur so die hier geradezu fundamentale Tatsache beobachten kann, daß *rechts neben dem genannten Streifen in der ganzen Länge der Fig. 1 noch deutlich ein zweiter, schwächerer Streifen einherläuft, der sowohl seinem Abstand wie auch seiner Intensität nach durchaus dem Streifen zweiter Ordnung entspricht*, Tatsachen, die m. E. die Richtigkeit der hier vorgetragenen Auffassung dieser Bilder über jeden Zweifel erheben.¹⁾

Hierzu kommt noch die weitere Tatsache, daß die Streifen auch — der Theorie entsprechend — entgegengesetzt der Keilform des Beugungsspaltcs verlaufen, also z. B. in der Fig. 1 der Taf. II unten einen größeren Abstand von der Mitte haben

1) Auf meinem in der Einleitung erwähnten Vortrag in Braunschweig hatte ich diesen Beugungsstreifen zweiter Ordnung noch nicht entdeckt, weswegen ich damals meiner Sache noch nicht so sicher war.

als oben. Zur genaueren Feststellung dieser Tatsache kann hier etwa so verfahren werden, daß man sich, indem man die Figur in der beschriebenen Weise betrachtet, in der Verlängerung der seitlichen Streifen sowohl wie auch in der der Mitte des Mittelstreifens oben und unten je einen Bleistiftstrich macht und dann die betr. Abstände bestimmt. In dieser Weise ergab sich nun der fragliche Abstand in Fig. 1 der Taf. II.

	oben	unten
für den ersten Beugungsstreifen	2,0	2,5 mm
und „ „ zweiten „	3,5	4,1 „

woraus man zunächst ersieht, daß beide Streifen unten weiter von der Mitte entfernt sind als oben, wie es die Keilform des Beugungspaltes verlangt, und ferner vor allem, daß auch die Abstände des ersten Streifens zu der des zweiten sich beiderseits annähernd wie 3 : 5 verhalten, wie es ja nach der Theorie der Fall sein muß. Nimmt man noch hinzu, daß auch die Intensität der beiden Streifen, soweit hier eine Schätzung möglich ist, durchaus mit der von der Theorie verlangten Größe, d. h. also mit bzw. 4,5 und 1,6 Proz. von der des Mittelstreifens übereinstimmt, so sind damit alle Bedingungen, die man hierbei an die fragliche Erscheinung stellen kann, erfüllt.

Der letzte und wichtigste Prüfstein derselben ist nun allerdings noch die Größe der Wellenlänge λ , welche sich aus dem Abstand dieser Streifen von der Mittellinie für die hier in Frage kommende Röntgenstrahlung ergibt. Die Theorie liefert hierfür bekanntlich die Gleichungen

$$(1) \quad \lambda = \frac{2}{3} \frac{d_1}{b} s_2 = \frac{2}{5} \frac{d_2}{b} s_2,$$

worin d_1 und d_2 bzw. die Abstände des ersten und zweiten Beugungsstreifens von der Mitte des Bildes, b den Abstand der photographischen Platte vom Beugungspalt und s_2 die Weite dieses Spaltes an der betr. Stelle bedeuten. Zur Berechnung von λ gehen wir nun hier am besten von dem Abstand d_2 des Beugungsstreifens zweiter Ordnung der Fig. 1 der Taf. II aus, für den sich, da es sich hier um eine 76fache Vergrößerung des Originalbildes handelt, nach den oben angegebenen Zahlen im Mittel $d_2 = \frac{0,88}{76} = 0,50 \cdot 10^{-2}$ cm ergibt. Der Abstand b ferner ist schon oben zu 75 cm angegeben, und es fehlt also zur Berechnung von λ nur noch die Spalt-

weite s_2 an der betr. Stelle. Diese ergab sich nun durch mikroskopische Ausmessung im Mittel einer größeren Reihe von Versuchen, die teils vor, teils nach der Aufnahme angestellt und bei denen auch Mikroskopobjektive verschiedener Vergrößerung benutzt wurden, zu $4,9 \mu$, so daß sich also

$$\lambda = \frac{2}{5} \frac{0,50 \cdot 10^{-3}}{75} \cdot 4,9 \cdot 10^{-4} = 1,31 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

ergibt.

Diese Größe ist nun allerdings um etwa 15 Proz. kleiner als der erwartete Wert von $1,54 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$; indessen kann dieser Unterschied in Anbetracht der vielen bei diesen Versuchen auftretenden Schwierigkeiten wohl kein großes Bedenken erregen; und man wird sich zunächst damit begnügen, daß wenigstens die Größenordnung der auf diesem Wege gefundenen Wellenlänge die richtige ist. Im übrigen gedenke ich, die Versuche weiter fortzusetzen und hoffe auch, bald über bessere Ergebnisse berichten zu können.

Zusammenfassung: Bei Aufnahme eines keilförmigen Spaltes, der sich von etwa 40μ Weite bis zum vollständigen Schlusse verjüngte, mit den Strahlen einer Röntgenröhre mit Kupferantikathode ergaben sich auf der in 75 cm Abstand hinter dem Spalt aufgestellten photographischen Platte in denjenigen Teilen des Bildes, welche einer Spaltweite von $5\text{--}2,5 \mu$ entsprachen — aber auch nur in diesen — neben dem Hauptbild deutliche Maxima und Minima, die ihrem ganzen Verlaufe nach als Beugungsfransen angesehen werden müssen. In der Gegend 5μ sieht man sogar zwei Streifen, die bzw. die Franse erster und zweiter Ordnung darstellen, da sie nicht bloß das richtige Abstandsverhältnis vom Hauptstreifen, sondern auch das richtige Intensitätsverhältnis zu diesem haben. Für die aus ihren Abständen vom Hauptstreifen berechnete absolute Größe der Wellenlänge der Kupferstrahlung ergibt sich der Wert $1,31 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$, also immerhin die richtige Größenordnung, wenn auch noch um etwa 15 Proz. zu niedrig. Der Unterschied wird auf die Schwierigkeiten der Versuche geschoben.

Hamburg, Physikal. Inst. der Universität, im März 1924.

(Eingegangen 18. März 1924.)

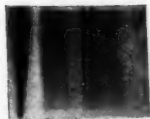


Fig. 1.

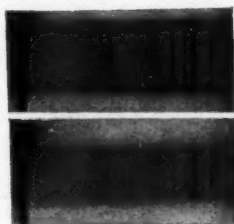


Fig. 2.

2,5 μ

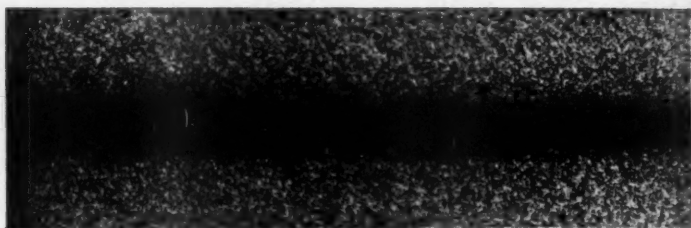


Fig. 4.

2,5



Fig. 3.

4



Fig. 2.

$s_2 = 5$

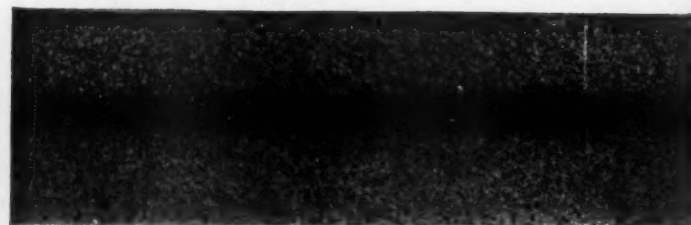


Fig. 1.

218. 4.

218. 5.

218. 6.

218. 7.